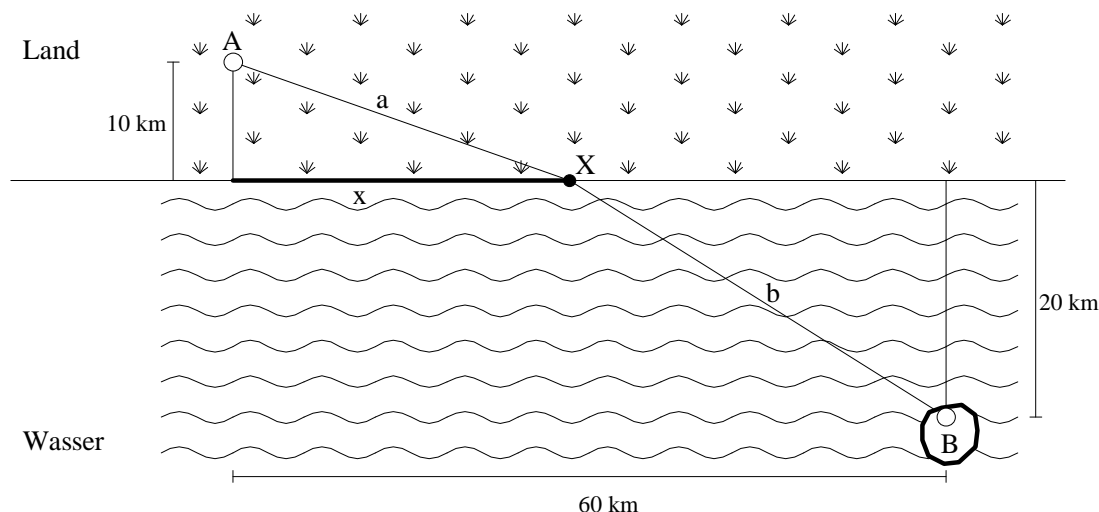


B: Minimale Baukosten

A und B sind zwei Städte, die durch eine Leitung (z.B. ein Glasfaserkabel) verbunden werden sollen. A liegt auf dem Land; B ist eine Inselstadt. Das Ufer verläuft geradlinig.



Auf dem Land werden pro Kilometer Leitung mit 2 Millionen Franken Kosten gerechnet. Die Verlegung der Leitung im Wasser ist teurer; man rechnet mit 3 Millionen Franken pro Kilometer. Wo ist der Punkt X zu wählen, damit die Kosten minimal sind?

Rechnerische Lösung (aufwändig, Software empfohlen)

Zielfunktion:

$$k(x) = 2 \cdot \sqrt{10^2 + x^2} + 3 \cdot \sqrt{((60-x)^2 + 20^2)} \quad \text{minimal} \quad x \in [0,60] . \quad (1)$$

Minimum?

$$k'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 100}} - \frac{3 \cdot (x-60)}{\sqrt{x^2 - 120x + 400}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 100}} = \frac{3 \cdot (x-60)}{\sqrt{x^2 - 120x + 400}}$$

Quadriert man beide Seiten so führt dies auf die folgende Gleichung 4. Grades:

$$x^4 - 120x^3 + 3460x^2 - 21600x + 648000 = 0$$

Ein numerisches Verfahren ergibt die reellen Lösungen: ($x_1 = 77.627$) und $x_2 = 42.926$. x_2 eingesetzt in die Zielfunktion (1) ergibt minimale Kosten von 167.04 Millionen Fr. (die Werte an den Intervallgrenzen 0 bzw. 60 sind grösser).

Lösung mit Excel

Minimale Leitungskosten

a0	10
b0	20
c0	60
A- Kosten/km	2
B- Kosten/km	3

x	a	b	A-K	B-K	K
0	10.00	63.25	20.00	189.74	209.74
5	11.18	58.52	22.36	175.57	197.93
10	14.14	53.85	28.28	161.55	189.84
15	18.03	49.24	36.06	147.73	183.79
20	22.36	44.72	44.72	134.16	178.89
25	26.93	40.31	53.85	120.93	174.79
30	31.62	36.06	63.25	108.17	171.41
35	36.40	32.02	72.80	96.05	168.85
40	41.23	28.28	82.46	84.85	167.31
45	46.10	25.00	92.20	75.00	167.20
50	50.99	22.36	101.98	67.08	169.06
55	55.90	20.62	111.80	61.85	173.65
60	60.83	20.00	121.66	60.00	181.66
41	42.20	27.59	84.40	82.76	167.16
42	43.17	26.91	86.35	80.72	167.07
43	44.15	26.25	88.29	78.75	167.04
44	45.12	25.61	90.24	76.84	167.08
45	46.10	25.00	92.20	75.00	167.20
46	47.07	24.41	94.15	73.24	167.39
47	48.05	23.85	96.10	71.56	167.67
48	49.03	23.32	98.06	69.97	168.03
49	50.01	22.83	100.02	68.48	168.50

