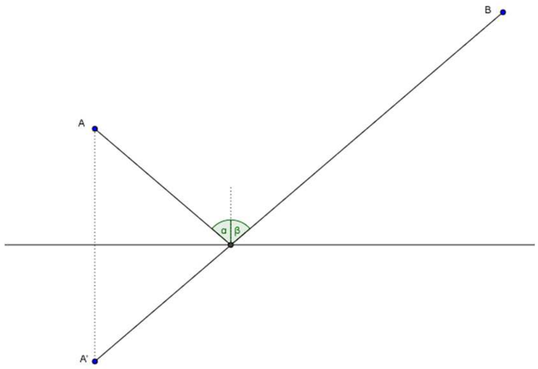
4. Extremalprobleme

Das Fermatsche Prinzip der kürzesten Lichtzeit (Pierre de Fermat 1601-1665)

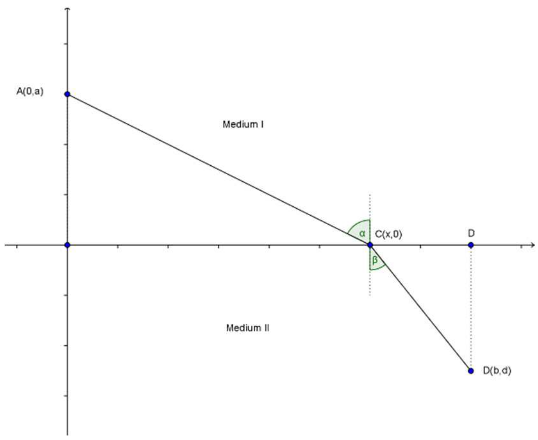
Lichtstrahlen wählen unter allen möglichenWegen denjenigen aus, bei dem die benötigte Zeit ein Minimum annimmt.

Reflexion:
In einer Ebene liegen die Gerade g und die Punkte A und B auf der gleichen Seite von g. Wird ein von A ausgehender Lichtstrahl an der Geraden g nach B reflektiert, so liegt nach dem Brechungsgesetz der Reflexionspunkt C so, dass der Einfallswinkel α mit dem Ausfallswinkel β übereinstimmt (C liegt auf der Verbindungsgeraden von B und dem Spiegel-punkt A' von A bezüglich g). Dieser Lichtweg ist gerade der minimale, denn für jeden andern Reflexionspunkt D wäre der Lichtweg grösser. Da ein homogenes Medium vorliegt ist damit auch die Lichtzeit minimal.



Refraktion:

Wir nehmen an, oberhalb der x-Achse sei ein dünneres Medium I, z.B. Luft, unterhalb der x-Achse ein Medium II, z.B. Wasser mit den zugehörigen Brechungsindizes n_1 bzw. n_2, d.h. das Licht pflanzt sich mit den Geschwindig-keiten $c_1 = \frac{c}{n_1}$ bzw. $c_2 = \frac{c}{n_2}$ fort.



Licht gelangt vom Punkt A(0,a) zum Punkt B(b, -d) über den Punkt C(x,0) so, dass das

Brechungsgesetz (Refraktionsgesetz) gilt:

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$ bzw. $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$ Brechungsgesetz

Wir zeigen, dass die zugehörige Zeit minimal ist.

Lichtwege: $\overline{AC} = \sqrt{a^2 + x^2}$ $\quad$ $\overline{CB} = \sqrt{d^2 + (b-x)^2}$

zugehörige Lichtzeiten: $\frac{\overline{AC}}{v_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1}$ $\quad$ $\frac{\overline{CB}}{v_2} = \frac{\sqrt{d^2 + (b-x)^2}}{v_2}$

Für die gesamte Lichtzeit t gilt damit:

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{d^2 + (b-x)^2}}{v_2}$$

Für das Minimum muss gelten:

$$t'(x) = \frac{2x}{2v_1\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{2(b-x)\cdot(-1)}{2v_2\sqrt{d^2 + (b-x)^2}} = 0$$ also:

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{(b-x)}{v_2\sqrt{d^2 + (b-x)^2}}$$ und wegen x = OC bzw. b - x = CD schliesslich:

$$\frac{OC}{v_1 AC} = \frac{CD}{v_2 CB} \text{ oder } \frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2} \text{ oder } \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{c}{n_1}}{\frac{c}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1}$$