3. Algebraische Funktionen

Einführende Beispiele:

B:
Löst man die algebraische Gleichung 1.Grades
$2y+4x^2-3x-10=0$
nach x auf, so erhält man
$y=-2x^2+\frac{3}{2}x+5$ Polynomfunktion (ganzrationale Funktion) 2.Grades

B:
Löst man die algebraische Gleichung 1.Grades
$\left(x^2+1\right)\cdot y-2x=0$
nach x auf, so erhält man
$y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ Gebrochenrationale Funktion

B:
Durch Auflösen der algebraischen Gleichung 2.Grades
$y-x^2=0$
nach x erhält man die beiden Wurzelfunktionen
$y=\pm\sqrt{x}$ $x \geq 0$

B:
Durch Auflösen der algebraischen Gleichung 2.Grades
$x^2+y^2=r^2$
erhält man
$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ Graph: oberer bzw.unterer Halbkreisbogen

weitere Beispiele sind die Kegelschnittgleichungen (Ellipse, Hyperbel, Parabel)

In Verallgemeinerung dieser Beispiele definiert man:

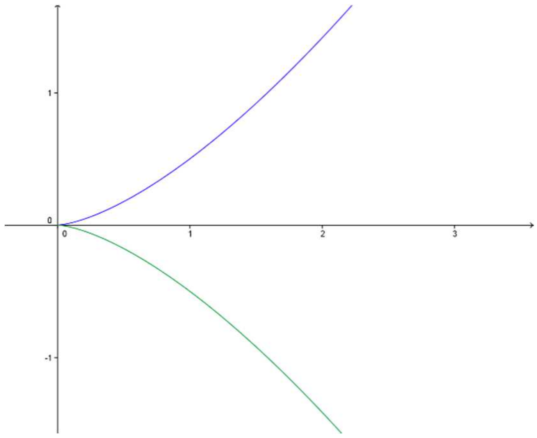
Def.
Algebraische Funktionen sind Lösungen einer algebraischen Gleichung n-ten Grades in der Variablen y von der Form
$a_n(x)\cdot y^n+a_{n-1}(x)\cdot y^{n-1}+...+a_1(x)\cdot y+a_0(x)=0$
dabei sind die Koeffizienten Polynome der Variablen x.

Bem.
Wie die Beispiele zeigen gibt es zu einer algebraischen Gleichung i.a. mehrere algebraische Funktionen.

Funktionen, die nicht algebraisch sind, heissen transzendent. Beispiele für transzendente Funktionen sind Exponential-, Logarithmus- und trigonometrische Funktionen.

Die folgende Beispiele sollen die Besonderheiten von algebraischen Kurven illustrieren:

B: Neil'sche Parabel



$y^2 = \frac{1}{4}x^3$ (1)

Diese algebraische Gleichung (Relation) legt zwei Funktionen fest:

$f_1(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x}$

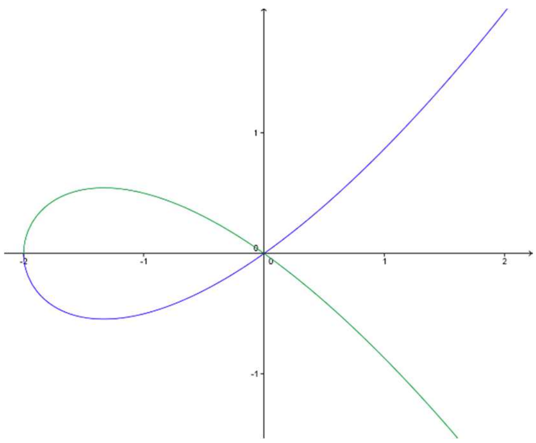
$f_2(x) = -\frac{1}{2}x\sqrt{x}$ x ≥ 0

Ableitungen:

$f'_{1,2}(x) = \pm\frac{3}{4}\sqrt{x}$ existiert für x > 0

An der Stelle x = 0 existiert der rechtsseitige Grenzwert 0 der 1.Ableitung (anschaulich: die x-Achse ist Tangente).
Die Graphen der beiden Funktionen bilden eine algebraische Kurve, deren Koordinaten die Gleichung (1) erfüllen. Die algebraische Kurve hat im Nullpunkt eine Spitze.

B:



$y^2 = \frac{1}{4}\left(x^3 + 2x^2\right)$ (2)

Diese algebraische Gleichung (Relation) legt zwei Funktionen fest

$f_1(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x+2}$ Definitionsbereich: x ≥ -2

$f_2(x) = -\frac{1}{2}x\sqrt{x+2}$ Definitionsbereich: x ≥ -2

Ableitungen: $f'_{1,2}(x) = \pm\frac{3x+4}{4\sqrt{x+2}}$ für x > -2

Der Graph hat an der Stelle x = -2 eine vertikale Tangente
Die Graphen der beiden Funktionen bilden eine alge-
braische Kurve, deren Koordinaten die Gleichung (2) erfüllen. Der Ursprung ist ein sogenannter Knotenpunkt

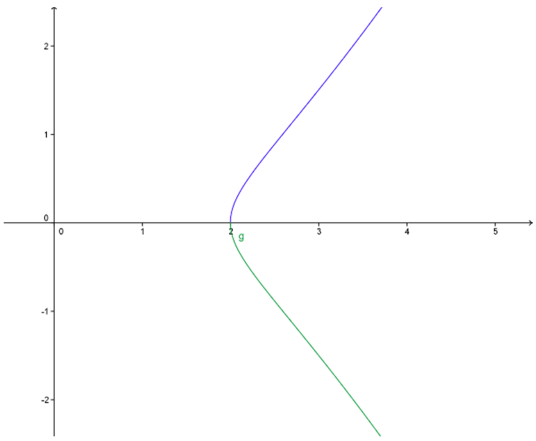
B:

$y^2 = \frac{1}{4}\left(x^3 - 2x^2\right)$ (3)

Diese algebraische Gleichung (Relation) legt zwei Funktionen fest

$f_{1,2}(x) = \pm\frac{1}{2}x\sqrt{x-2}$ Definitionsbereich: x ≥ 2

Ableitungen: $f'_{1,2}(x) = \pm\dfrac{3x-4}{4\sqrt{x-2}}$ existiert für x > 2.



Bem.:

Die beiden Funktionen sind an der Stelle x = 0 nicht definiert, der Punkt (0,0) erfüllt aber die algebraische Gleichung (3). Die algebraische Kurve hat einen sogenannten Einsiedler. An der Stelle 2 hat die algebraische Kurve eine vertikale Tangente.

B: Virtuelle Parabel nach Christian Huygens (1629-1695)

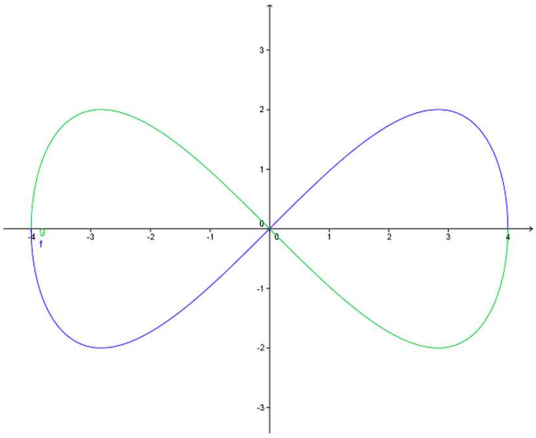
$y^2 = \dfrac{x^2}{16}\cdot\sqrt{16-x^2}$

Diese algebraische Gleichung (Relation) legt zwei Funktionen fest

$f_{1,2}(x) = \pm\dfrac{x}{4}\cdot\sqrt{16-x^2}$

Definitionsbereich: $|x| \le 4$

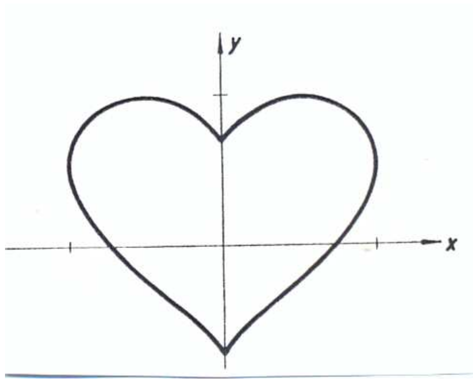
$f'_{1,2}(x) = \dfrac{8-x^2}{2\sqrt{16-x^2}}$



Der Graph hat horizontale Tangenten an den Stellen $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}$. An den Stellen ± 4 sind die Tangenten vertikal.

B: (Quelle Bachmann: Analysis sabe)

$x^2 + 2\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{x^2} - y\right)^2 - 1 = 0$

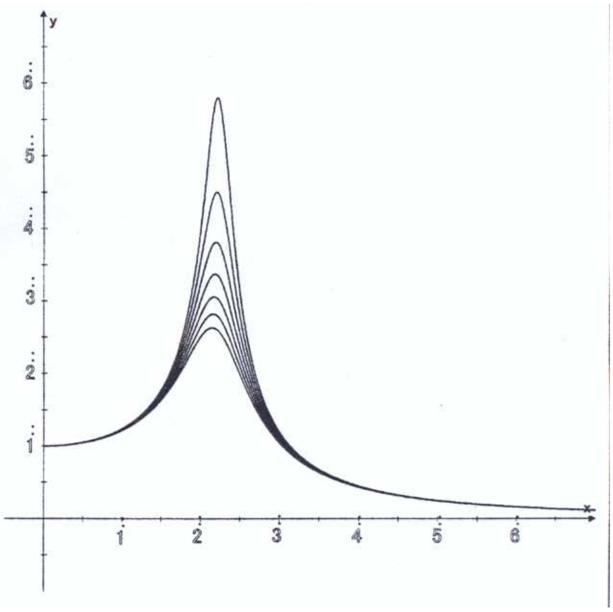


B: (MNU 58/5 (15.7.2005)
Durch eine periodische Kraft
(Amplitude F_0, Winkelgeschwindigkeit ω)
unter der Dämpfung k wird ein System
der Eigenfrequenz $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ zu
Schwingungen der Amplitude A angeregt.
Es gilt:

$$A(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + k^2\omega^2}}$$

vereinfacht an einem Beispiel:

$$f(x) = \frac{5}{\sqrt{\left(5 - x^2\right)^2 + 0.15 \cdot x^2}}$$



Mögliche Fragen:
Lage des Maximums bezüglich f0
Bedeutung des Parameters k
Grenzwerte für x $\to$ 0 und x $\to \infty$
Breite der Peaks , z.B. Halbwertsbreite.