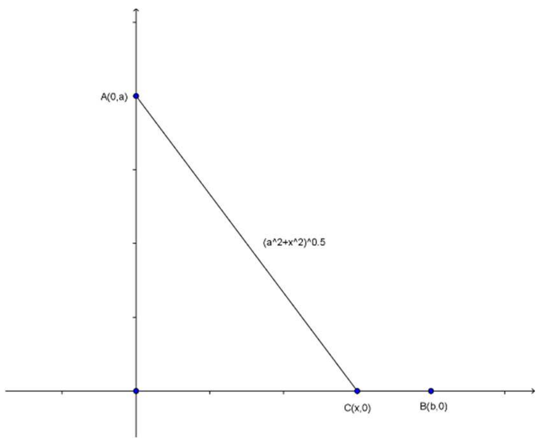
B: Ruderboot

Eine Sportlerin befindet sich auf einem Ruderboot im Punkt A(0,a) und will möglichst rasch den Punkt B(b,0) am Ufer erreichen. Ihre Geschwindigkeit zu Wasser sein v, jene zu Lande w. Wo muss sie landen?



Zielfunktion:

Wenn die Sportlerin im Punkt C(x,0) landet, dann beträgt ihre Zeit t:

$$t(x)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v}+\frac{b-x}{w} \qquad x \in [0,b] \qquad (1)$$

Bestimmung des Minimums:

$$t'(x)=\frac{x}{v\cdot\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{1}{w}=0 \text{ oder } \frac{x}{v\cdot\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{w} \text{ oder } \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{v}{w}$$

Quadrieren führt auf

$$\frac{x^2}{a^2+x^2}=\frac{v^2}{w^2} \text{ und nach kurzer Umformung auf } x^2=\frac{a^2v^2}{w^2-v^2}$$

1. Fall: $w \le v$ (die Sportlerin rudert schneller als sie rennt)

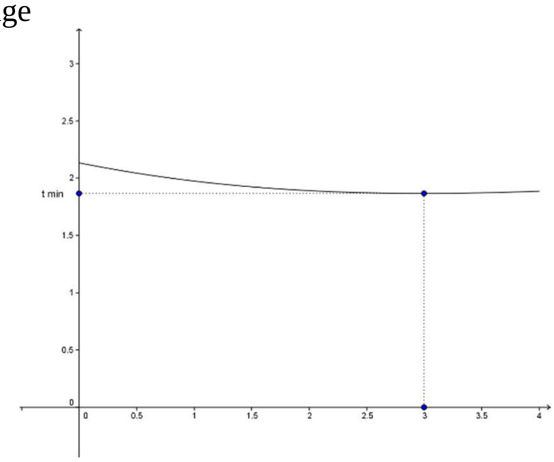
In diesem Fall hat f‘ keine Nullstelle. Die Sportlerin wird direkt nach B rudern.

2. Fall: $w > v$

f‘ hat in diesem Fall die positive Nullstelle $x_0=\frac{av}{\sqrt{w^2-v^2}}$

1. Beispiel: a = b = 4, mit v = 3 und w = 5

Als Kandidaten für das Extremum kommen in Frage $x_0 = 3$ (Nullstelle der 1. Ableitung und die Randstellen 0 und 4



Aus der Zielfunktion ergeben sich die Werte

$t(0)=\frac{32}{15}\approx 2.133$, $t(3)=\frac{28}{15}\approx 1.867$ und

$t(4)=\frac{4\cdot\sqrt{2}}{3}\approx 1.886$

Die Zeit wird damit für x = 3 minimal.

2. Beispiel: a = 4 und b = 2, mit v = 3 und w = 5

In diesem Fall liegt die Nullstelle der 1. Ableitung wegen 3 > b ausserhalb. Damit kommen für das Minimum nur die Randstellen in Frage

$t(0)=\frac{26}{15}\approx 1.733$, und $t(2)=\frac{\sqrt{20}}{3}\approx 1.491$

Die Sportlerin sollte in diesem Fall direkt nach B rudern