Ableitung der Umkehrfunktion, Algebraische Funktionen

1.Umkehrfunktionen

Frage:
Lässt sich die Wirkung einer Funktion f allenfalls rückgängig machen? Kann aus dem Funktionswert (aus dem Bild) auf das Argument (das Original) geschlossen werden?

einführende Beispiele

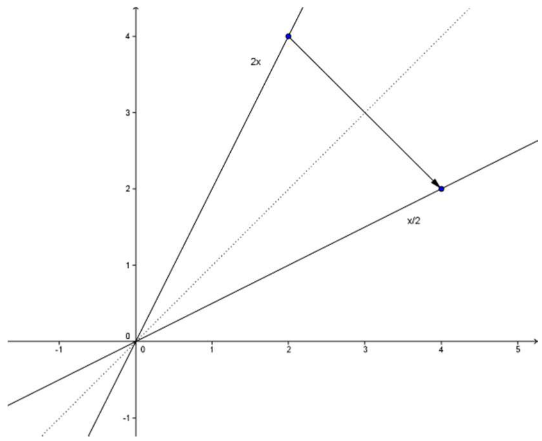
B:

Funktion f: Verdoppler

$f: x \xrightarrow{\cdot 2} y = 2x \qquad x \in \mathbb{R}$

Umkehrfunktion $\bar{f}$: Halbierer

$\bar{f}: x \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} y = \frac{1}{2}x$



rechnerisches Verfahren:

1. Löse $y = 2x$ für gegebenes y nach x auf:
$x = \frac{1}{2}y$
2. Vertausche die Variablen x und y: $x = \frac{1}{2}y$

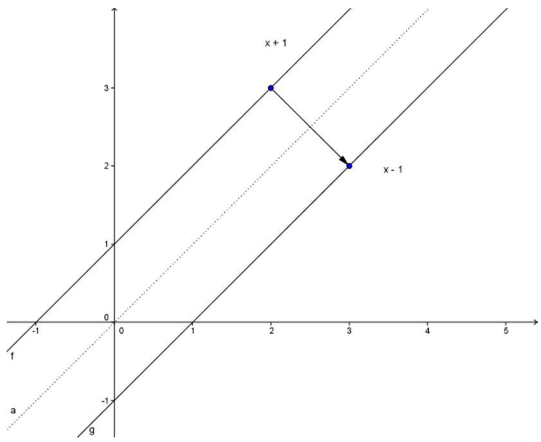
B:

Funktion f: 1-Addierer

$f: x \xrightarrow{+1} y = x + 1 \quad x \in \mathbb{R}$

Umkehrfunktion $\bar{f}$: 1-Subtrahierer

$\bar{f}: x \xrightarrow{-1} y = x - 1$



B:

Funktion f:

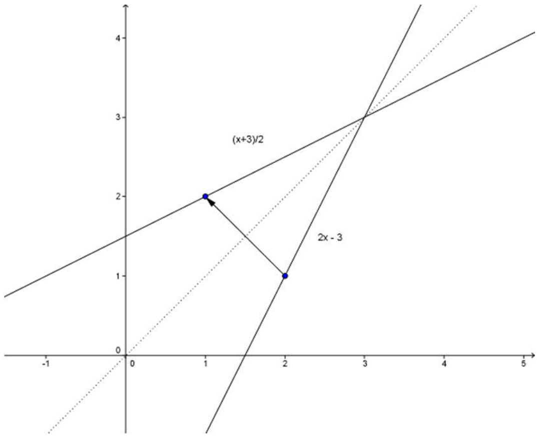
$f: x \xrightarrow{+1} y = 2x - 3 \quad x \in \mathbb{R}$

verdopple und subtrahiere 3

Umkehrfunktion $\bar{f}$:

$\bar{f}: x \xrightarrow{\cdot -1} y = \frac{1}{2}(x + 3)$

addiere 3 und halbiere



Vergleiche dazu
morgens: zuerst Socken anziehen, dann Schuhe anziehen
abends: zuerst Schuhe ausziehen, dann Socken ausziehen!

allg.
Definition:
Die Funktion f mit dem Definitionsbereich D und dem Wertebereich W heisst umkehrbar, wenn die Gleichung y = f(x) für jedes y aus W eindeutig nach x aufgelöst werden kann. Die dadurch bestimmte Funktion $\bar{f}$ heisst Umkehrfunktion der Funktion f

Regel zur Bestimmung der Umkehrfunktion:
1. Löse die Funktionsgleichung y = f(x) für gegebenes $y \in W$ nach x auf
2. Vertausche die Variablen x und y.

Die Vertauschung der Variablen x und y bewirkt eine Spiegelung des Graphen von f an der 1. Winkelhalbierenden.
Der Wertebereich der Funktion f wird zum Definitionsbereich der Umkehrfunktion $\bar{f}$ umgekehrt der Definitionsbereich der Funktion f zum Wertebereich der Umkehrfunktion $\bar{f}$.

Folgerung:
$\bar{f}(f(x)) = x \quad x \in D$

Damit eine Funktion f umkehrbar ist, muss einem gegebenen y des Wertebereichs eindeutig ein bestimmter x-Wert zugeordnet sein, d.h. zu verschiedenen Argeumenten gehören verschiedenen Funktionswerte. Für den Graph der Funktion f bedeutetet dies: eine Parallele zur x-Achse schneidet den Graphen von f in höchstens einem Punkt.Dies führt zur folgenden

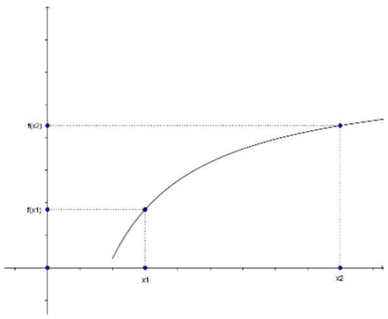
Definition:
f heisst injektiv genau dann, wenn gilt: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Satz:
Ist eine Funktion f in einem Intervall monoton wachsend oder fallend, dann ist sie umkehrbar.

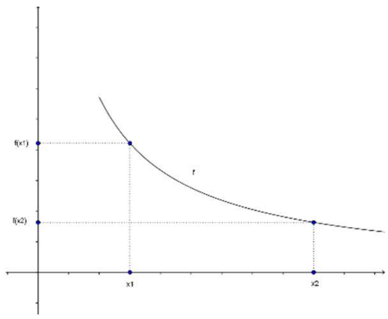
Begründung:
Jede Parallele zur x-Achse schneidet den Graphen von f in höchstens einem Punkt, verschiedenen x-Werten entsprechen auch verschiedene Funktionswerte, d.h. f ist injektiv.
Für die Umkehrbarkeit einer Funktion ist die Monotonie hinreichend, aber nicht notwendig.

Bem.:
Die Monotonie kann z.B. mit der 1. Ableitung überprüft werden.
Def.
f heisst injektiv genau dann wenn gilt. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

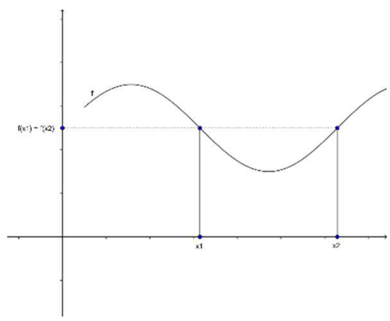
f monoton fallend



f monoton fallend

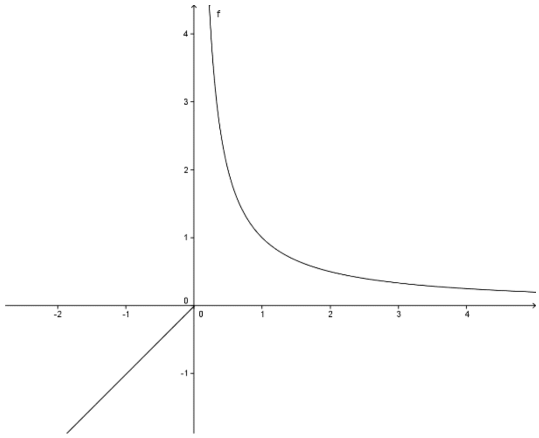


f nicht injektiv



Die Umkehrung gilt aber nicht, wie das folgende Beispiel einer nicht monotonen, aber umkehrbaren Funktion zeigt:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$$



Ist eine Funktion f nicht injektiv, dann kann sie auf einem Teilintervall umkehrbar sein:

B:

$f: x \to y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} \quad D = [0, \infty[\quad W = \left]\frac{3}{2}, \infty\right[$

Der Graph der Funktion f ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel S(0, 1.5).
Schränkt man den Definitionsbereich der Funktion ein zu $D = [0, \infty[$, dann ist die Funktion injektiv.

$f: \quad x \xrightarrow{quadrieren} u \xrightarrow{halbieren} v \xrightarrow{\frac{3}{2}\ addieren} y$

$\bar{f}: \quad x \xleftarrow{Wurzel} u \xleftarrow{verdoppeln} v \xleftarrow{\frac{3}{2}\ subtrahieren} y$ oder

$\bar{f}: x \to y = \sqrt{2x - 3} \quad D = \left]\frac{3}{2}, \infty\right[\quad W = [0, \infty[$

Uebungsaufgabe :
Bestimme für die Funktion f die Gleichung der Umkehrfunktion :

$f: x \to y = 2 \cdot \sqrt{x-1} + 3 \quad D = \left]1, \infty\right[\quad W = [3, \infty[$

Lösung :

$f: x \to y = \frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 + 1 \quad D = [3, \infty[\quad W = \left]1, \infty\right[$