Aufgabenblatt zu geometrischen Anwendungen der Differentialrechnung

---

1.
Gegeben sind die Kurve mit der Gleichung k: $y = ax^3$ und die Gerade t: $y = 6x + 4$.
Für welchen Wert des Parameters a ist t Tangente an die Kurve k? Welche Koordinaten hat der Berührungspunkt B?

2.
Die Parabel mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2}x^2$ ist so in positiver y-Richtung zu verschieben, dass die verschobene Parabel die Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$ senkrecht schneidet. Gesucht sind die Gleichung der verschobenen Parabel un die Schnittpunktskoordinaten.

3.
Gegeben ist die Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$. Gesucht ist eine zweite quadratische Parabel mit dem Scheitel $S(2, 3)$, welche die Normalparabel berührt. Gesucht sind der Berührungspunkt B und die Gleichung dieser Parabel.

4.
Gegeben ist die Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{1}{x}$. Die Tangente in einem beliebigen Hyperbelpunkt $P(x_0, y_0)$ mit $x_0 > 0$ schneidet die positiven Koordinatenachsen in den Punkten $A(a, 0)$ und $B(0, b)$. Welchen Inhalt I hat das Dreieck OAB?

5.
Die Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$ ist so zu verschieben, dass sie die zwei Geraden $g_1: y = x + 1$ und $g_2: 2x + y - 1$ berührt.

6.
a)
Die Gerade mit der Gleichung $y = 2x + 3$ schneidet die Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$ in zwei Punkten P_1und P_2. Welche Koordinaten hat der Punkt P_0 , in dem die Parabeltangente parallel zur Sekante P_1P_2 ist?
b)
Verallgemeinerung von a)
Gegeben sind zwei beliebige Punkte P_1und P_2der Parabel $y = ax^2$. Welche Koordinaten hat der Punkt P_0 , in dem die Parabeltangente parallel zur Sekante P_1P_2 ist?

7.
Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$.
In einem beliebigen Parabelpunkt $P_0(x_0, y_0)$ zieht man die Normale *l* zur y-Achse und die Normale n auf die Parabeltangente. Die beiden Geraden schneiden die y-Achse in den Punkten L und N. Welche Länge hat die Strecke LN?

Lösungen:

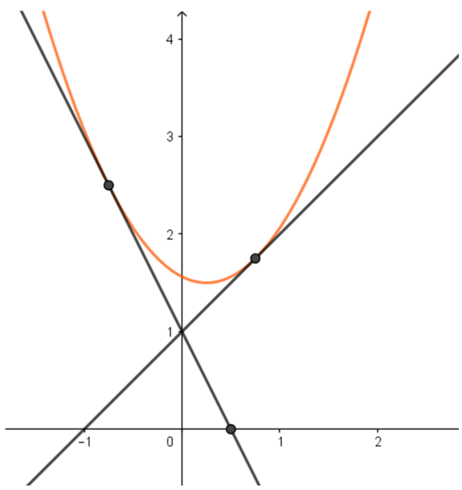
1.
$a = 2,\ B(-1.-2)$

2.
$c = \frac{3}{4}\quad S_{1,2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$

3.
$B\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)\quad y = -3(x-2)^2 + 3$

4.
$I = 2$ unabhängig von x_0.

5.
Die Funktionswerte stimmen überein an den Stellen
x_1: $\quad x_1^2 + bx_1 + c = x_1 + 1 \qquad 1)$
x_2: $\quad x_2^2 + bx_2 + c = -2x_2 + 1 \qquad 2)$
Die Ableitungen stimmen überein an den Stellen
x_1: $\quad 2x_1 + b = 1 \qquad 3)$
x_2: $\quad 2x_2 + b = -2 \qquad 4)$
3) nach b aufgelöst
$b = 1 - 2x_1 \qquad 5)$
In 1) -2) b eingesetzt und vereinfacht:
$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = -3x_2$ oder $(x_1 - x_2)^2 = -3x_2 \qquad 6)$
Differenz von 3 und 4)
$2x_1 - 2x_2 = 3$ oder wegen 6) $(x_1 - x_2) = \frac{3}{2} \qquad 7)$
$(x_1 - x_2)^2 = \frac{9}{4} = -3x_2$ und daraus
$x_2 = -\frac{3}{4} \qquad 8)$
$x_1 = x_2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$ nach 7)
$b = 1 - 2x_1 = -\frac{1}{2}$
eingesetzt in 1) folgt
$c = \frac{25}{16}$
Vermutlich geht es auch einfacher.



6.
a) $x_1 = -1 \quad x_2 = 3$
b)
Steigung der Sekante
$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = a\cdot\frac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1} = a\cdot(x_2 + x_1)$
Steigung der Tangente
$f'(x_0) = 2ax_0$
aus der Gleichheit folgt:
$2ax_0 = a\cdot(x_1 + x_2)$
oder
$$x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

7.

Gleichung der Normalen n zur Parabel $y = -\frac{1}{2ax_0} \cdot x + q$

$P_0(x_0, y_0)$ erfüllt die Parabelgleichung

$ax_0^2 = -\frac{1}{2ax_0} \cdot x + q$ oder $q = ax_0^2 + \frac{1}{2ax_0} \cdot x_0 = ax_0^2 + \frac{1}{2a}$

Da die Normale l zur y-Achse die y-Achse im Punkt $L(0, ax_0^2)$ ist der gesuchte Abstand $\overline{LN} = \frac{1}{2a}$.