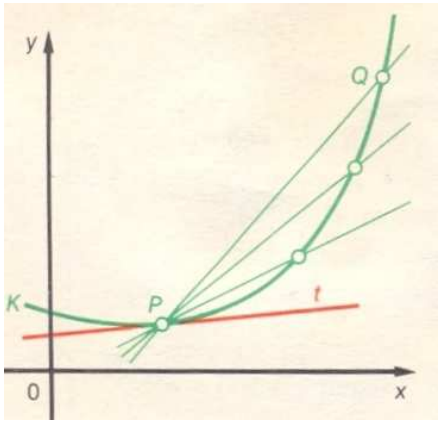
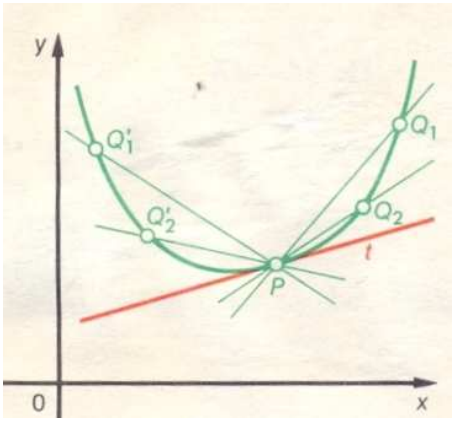
2. Definition der 1. Ableitung, Potenzregel

In diesem Abschnitt wird die Tangentensteigung auf rechnerischem Weg gesucht. Bei der Lösung dieses Problems spielt der Grenzwertbegriff eine wichtige Rolle.

Wir betrachten Sekanten durch den Punkt P_0 des Graphen der Funktion f und wählen in der Umgebung von P_0 einen Nachbarpunkt Q. Strebt dann die Kurvensekante P_0Q gegen dieselbe Grenzlage unabhängig davon, ob sich Q von links oder rechts P_0 nähert, dann bezeichnen wir die der Grenzlage entsprechende Gerade als Tangente an die Kurve im Punkt P_0.

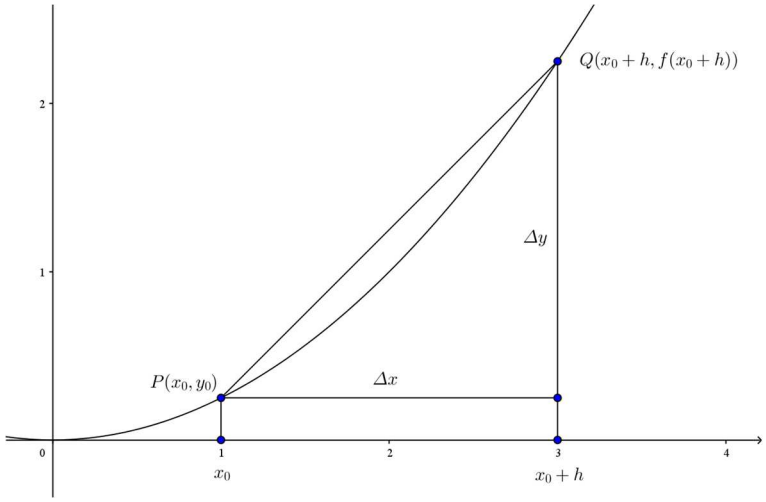




Rechnerische Durchführung der Idee an einem Beispiel:

$f(x) = ax^2$
$a = \frac{1}{4}, \quad x_0 = 1$

h	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
3	1.25
1	0.75
0.5	0.625
0.1	0.525
0.01	0.5025



Vermutung: Die Tangentensteigung ist $\frac{1}{2}$.

Allgemein:
$P(x_0, ax_0^2)$ $\quad Q(x_0 + h\,, a(x_0 + h)^2)$

Sekantensteigung (auch Differenzenquotient genannt)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \cdot \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = a \cdot \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h}$$

$$= a \cdot \frac{h \cdot (2x_0 + h)}{h} = a \cdot (2x_0 + h)$$

Die Tangentensteigung (der sogenannte Differentialquotient) ist gleich dem Grenzwert der Sekantensteigungen (des Differenzenquotienten)

$$\lim_{h \to 0} a \cdot (2x_0 + h) = 2ax_0$$

Bemerkung:
Der Differenzenquotient ist nur für h ≠ 0 definiert. Es ist also abzuklären, ob sich allenfalls der Differenzenquotient einem eindeutig bestimmten Wert nähert, wenn h beliebig klein wird. Ein solcher Grenzwert kann i.a. nicht dadurch bestimmt werden, indem man h = 0 setzt (→Ableitung der Sinusfunktion).

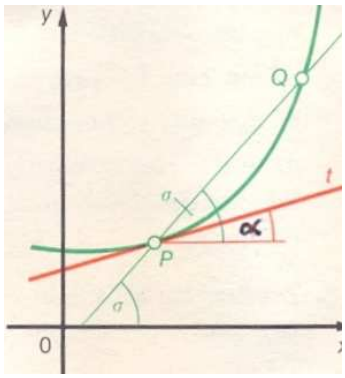
Damit gilt der folgende Satz:
Satz:
Der Graph der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = ax^2$ hat an der Stelle x_0 die Tangentensteigung $2ax_0$.

Dafür wird nun eine neue Sprechweise eingeführt:
Die Funktion f ist an der Stelle x_0 differenzierbar. Die zugehörige Tangentensteigung heisst Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 und wir schreiben symbolisch:
$f'(x_0) = 2ax_0$

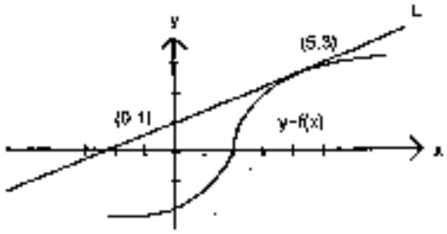
Üblicherweise wird der Index 0 weggelassen und man schreibt kurz:
$(ax^2)' = 2ax$

Aus der Tangentensteigung ergibt sich der Steigungswinkel α zu:

$\tan\alpha = f'(x_0)$

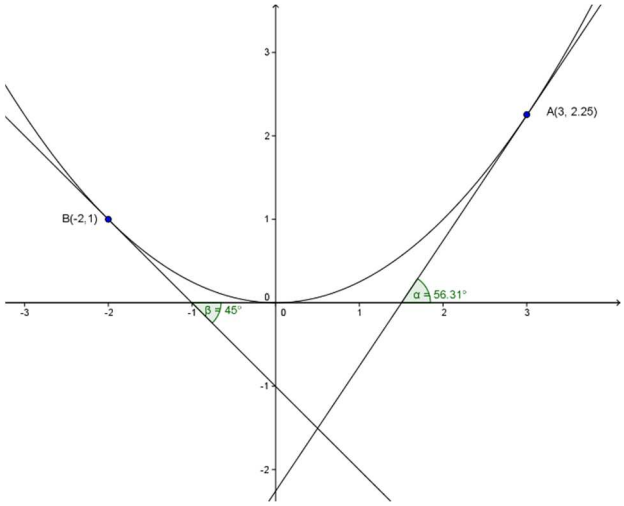


Übungsaufgabe:
Suppose line L is tangent to the curve y = f(x) at the point (5,3) as indicated below.
Find f(5) und f ´(5).



Lösung:
$f(5) = 3,\ f\,'(5) = \frac{2}{5}$

Aufgabe:
Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung
$y = f(x) = \frac{1}{4}x^2$
a)
Gesucht sind eine Gleichung der Tangente im Parabelpunkt A(3/?) und ihr Steigungswinkel.
b)
In welchem Punkt B ist die Parabeltangente parallel zur 2. Winkelhalbierenden?
c)
An welcher Stelle ist die Parabeltangente parallel zur Geraden g:$2x - 3y - 6 = 0$?



Lösung:

a)
Die y-Koordinate des Berührungspunkts A ist gleich dem Funktionswert von f an der Stelle 3:
$y = f(3) = \frac{9}{4}$
Die Steigung der Tangente ist gleich dem Wert der ersten Ableitung an der Stelle 3:
$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot x = \frac{1}{2}x$
$m_t = f'(3) = \frac{3}{2}$
Damit kann die Gleichung der Tangente in der folgenden Form angesetzt werden:
$t: y = \frac{3}{2}x + q$
q ergibt sich aus der Bedingung, dass die Koordinaten von A die Tangentengleichung erfüllen:
$t: y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$
Der Steigungswinkel ergibt sich wegen $tan\ \alpha = m$ zu $\alpha = \arctan(\frac{3}{2}) \approx 56.3°$
c)
Die 2. Winkelhalbierende mit der Gleichung $y = -x$ hat die Steigung $m = -1$.
Gesucht ist also die Stelle x für welche die 1. Ableitung den Wert -1 hat:
$f'(x) = \frac{1}{2}x = -1$ mit der Lösung $x = -2$
c)
Aus der expliziten Form der Geradengleichung $y = \frac{2}{3}x + 2$ ergibt sich die Steigung zu $\frac{2}{3}$.
Gesucht ist also die Stelle x für die gilt:
$f'(x) = \frac{1}{2}x = \frac{2}{3}$ mit der Lösung x $= \frac{4}{3}$ $\quad x = \frac{4}{3}$