# Differentialrechnung

## 1. Einleitung

Die Infinitesimalrechnung (auch Analysis, Calculus) setzt sich aus den Teilgebieten Differentialrechnung (DR) und Integralrechnung (IR) zusammen. Der Name kommt vom lateinischen infinitus, unbegrenzt (klein). Ihre Entwicklung ist u.a. mit den Namen von Isaac Newton (1642-1727, „Methode der Fluxionen“) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) verknüpft.

Im folgenden sind einige typische Fragestellungen dieser Gebiete zusammengestellt.

| | | |
|---|---|---|
| 1. Gegeben: | Weg-Zeitfunktion z.B. freier Fall | $s = \frac{1}{2}\,gt^2$ |
| Gesucht: | Geschwindigkeits-Zeitfunktion (Problem der DR) | $v = gt$ |
| | Beschleunigung-Zeit-Funktion | $a = g$ |
| 2. Umkehrproblem von 1.: | | |
| Gegeben: | Geschwindigkeit-Zeitfunktion | |
| Gesucht: | Weg-Zeitfunktion (Problem der IR) | |

3. Das Problem der Kurventangente (Problem der DR)

4.. Das Problem, den Inhalt des von einer Kurve begrenzen Gebiets zu bestimmen. (Problem der IR)

5. Das Problem, für eine gegebene Kurve die Länge des Kurvenbogens zu bestimmen (Problem der IR)

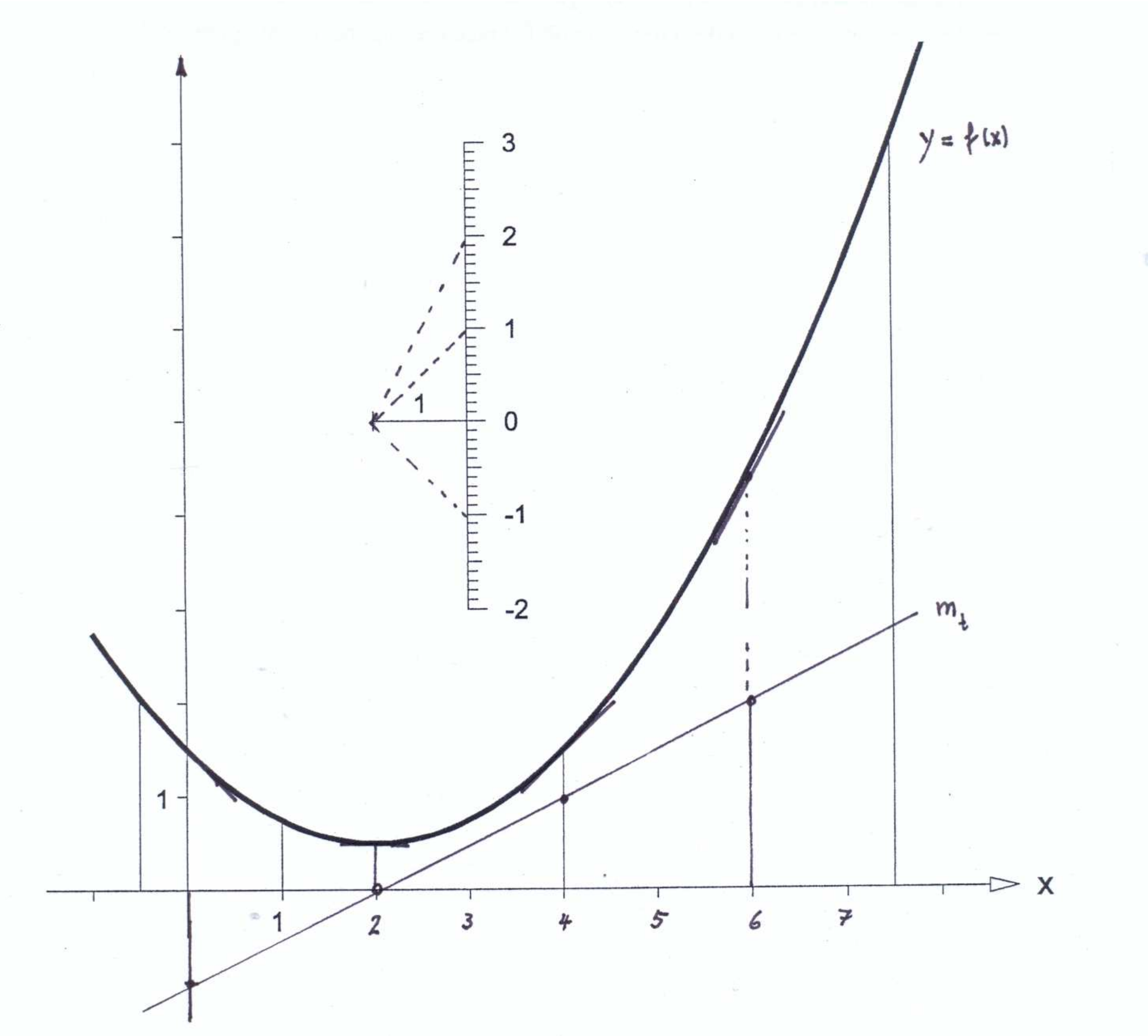
6. Das Problem, bei einem Körper mit bekannter Querschnittsfläche das Volumen bzw. die Oberfläche zu bestimmen (Problem der IR)

7. Physik: Das Problem der mechanischen Arbeit z.B. beim Dehnen einer Feder (Problem der IR)

8. Das Problem zu einer Funktion an einer bestimmten Stelle die bestmögliche (lineare) Ersatzfunktion zu bestimmen (Problem der DR). Stellt man den Graphen der Funktion dar, dann ist also die Tangente gesucht (Problem 3.)
   Oft interessiert nämlich in Anwendungen an einer Stelle $x_0$ nicht nur der Funktionswert $f(x_0)$, sondern auch wie stark sich der Funktionswert in einer Umgebung ändert, d.h. es interessiert die lokale Änderungsrate z.B.:
   Metereologie: Es interessiert nicht nur der momentane Luftdruck in bar, sondern wichtig ist auch die Änderungstendenz.
   Bevölkerungswachstum: Es interessiert nicht nur die aktuelle Bevölkerungszahl eines Kontinents, sondern auch die momentane Wachstumsrate. Sie ermöglicht eine Prognose für die kommenden Jahre.

**Das Problem der Kurventangente**

Vorbereitende Aufgabe:
Gegeben ist der Graph der Funktion $f(x)=\frac{1}{4}x^2-x+\frac{3}{2}$. Es ist mit Hilfe eines Lineals an verschiedenen Stellen die Tangentensteigung des Graphen von f zu bestimmen. Die zugehörige Steigung ist anschliessend so genau wie möglich in das Koordinatensystem einzutragen.
Pro memoria:
Die Steigung einer Geraden ist definiert zu $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Steigung m bedeutet also:
Wenn x um 1 wächst, so verändert sich y um m.

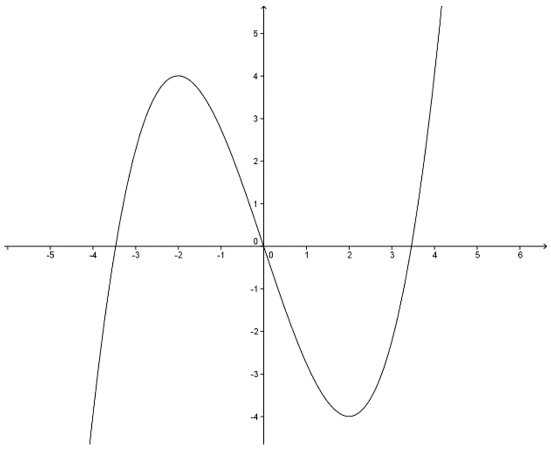


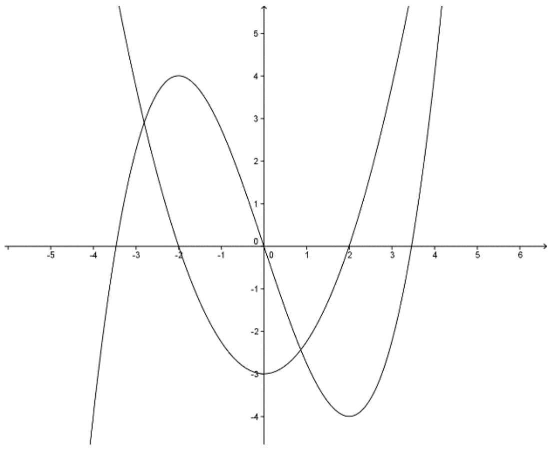

Ergebnis:
Die Punkte scheinen auf einer Geraden mit der Steigung $m=\frac{1}{2}$ und dem y-Achsen-abschnitt – 1 zu liegen, d.h. die Steigung scheint linear zu wachsen. Die DR löst das Problem der Steigung auf rechnerischem Weg.

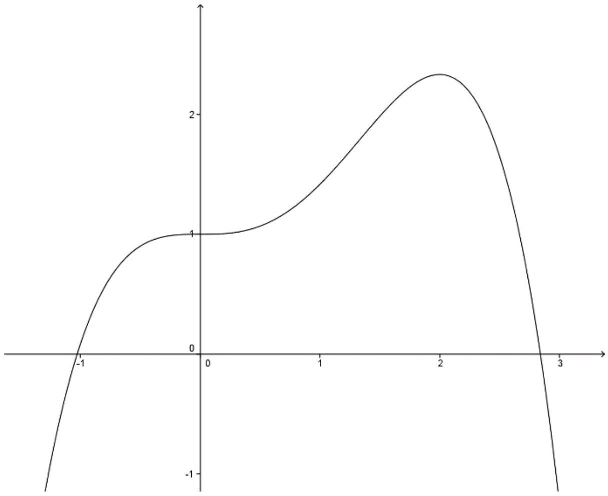
Aufgabe:
In den folgenden Beispielen ist der Graph der Funktion gegeben. Für einige x-Koordinaten ist grafisch die Tangentensteigung zu bestimmen. Die zugehörigen Steigungen sind ins Koordinatensystem eingetragen. Durch Verbinden dieser Punkte ergibt sich qualitativ eine Information über die Tangentensteigung des Graphen.

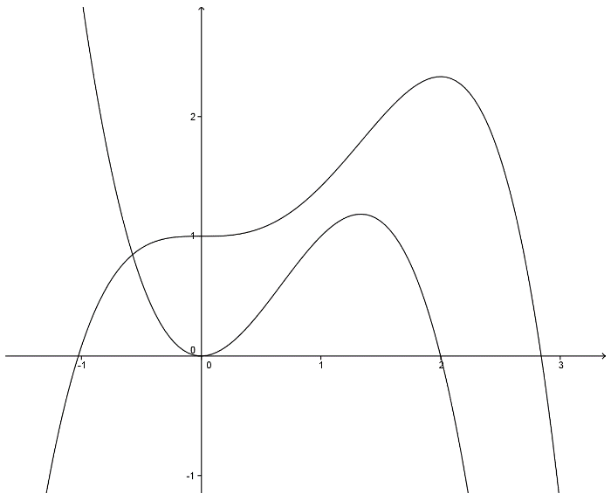
Graph der Funktion

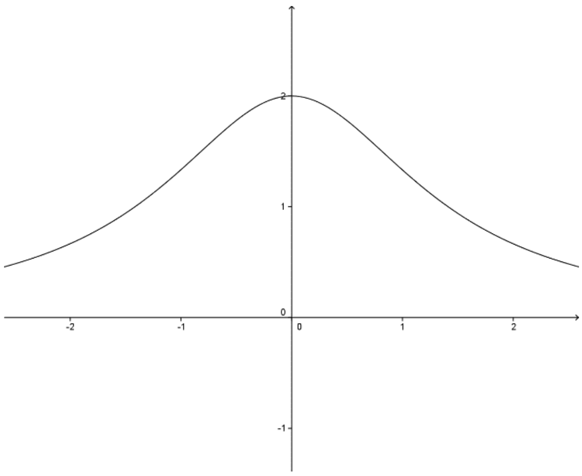
Graph der Funktion mit Tangentensteigung

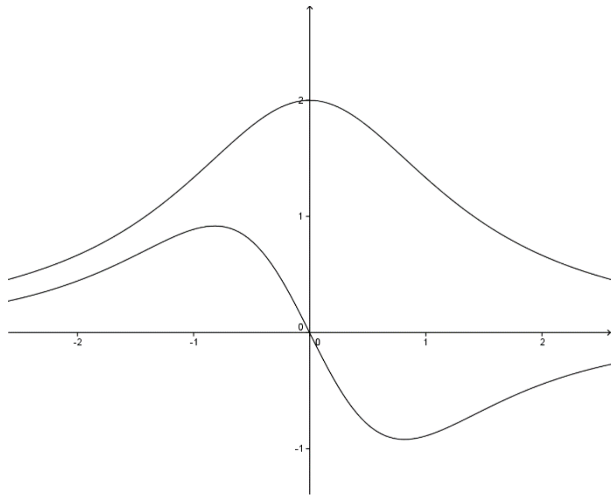








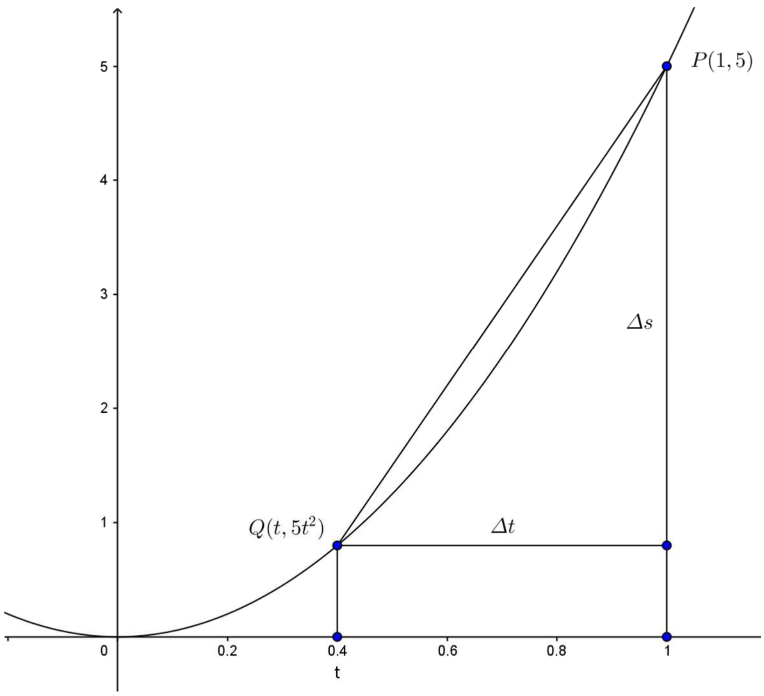




**Ein Beispiel aus der Physik: Freier Fall**

Mit welcher Geschwindigkeit taucht man bei einem Sprung vom 5m-Brett ins Wasser?
Nach dem Fallgesetz gilt im Vakuum:
$s = \frac{1}{2} g t^2$ mit $g \approx 10 \frac{m}{s^2}$ also gilt ungefähr $s(t) = 5t^2$

Wir untersuchen für gegebenes $\Delta t$ die von $\Delta t$ abhängige mittlere Geschwindigkeit $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ auch Differenzenquotient genannt. In der Skizze entspricht ihr die Steigung der Sekante PQ.




| t | $\Delta t$ | $\Delta s$ | $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ |
|---|---|---|---|
| 0.6 | 0.4 | 3.2 | 8 |
| 0.9 | 0.1 | 0.95 | 9.5 |
| 0.99 | 0.01 | 0.0995 | 9.95 |
| 0.999 | 0.001 | 0.009995 | 9.995 |
| 0.9999 | 1E-04 | 0.00099995 | 9.9995 |

Die mittleren Geschwindigkeiten scheinen sich mit kleiner werdendem $\Delta t$ dem Wert 10 zu nähern. Wir vermuten, dass die momentane Geschwindigkeit beim Eintauchen 10 m/s beträgt.