

5. Einige geometrische Anwendungen

1. Stellen mit vorgegebener Tangentensteigung, horizontale Tangenten

Aufgabe:

Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung

$$p: y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6.$$

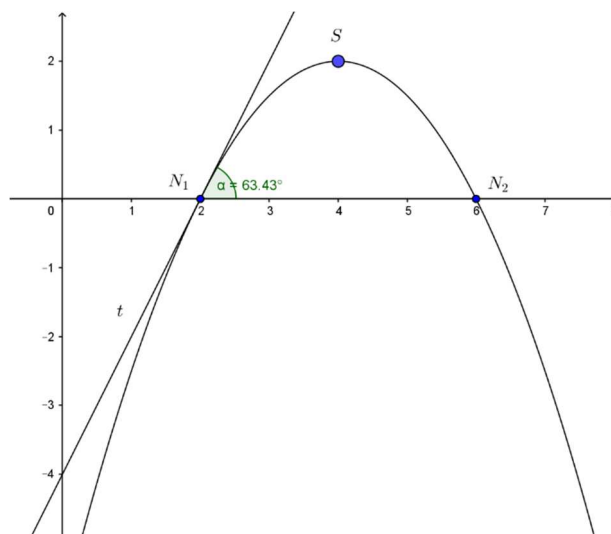
a)

Welche Koordinaten hat der Scheitelpunkt S der Parabel?

An den Stellen mit horizontaler Tangente, verschwindet die 1. Ableitung

$$f'(x) = 4 - x = 0 \quad x_S = 4$$

$$y_S = f(x_S) = 2 \quad S(4, 2)$$



b)

An welchen Stellen schneidet die Parabel die x-Achse?

Gesucht sind die x-Werte, für die $f(x) = 0$ gilt.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 - 8x + 12) = -\frac{1}{2} \cdot (x - 6) \cdot (x - 2) = 0$$

$$x_1 = 6 \text{ bzw. } x_2 = 2$$

Variante: quadratische Auflösungsformel

Bemerkung:

Verwendet man noch die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse $Y(0, -6)$, dann kann die Parabel mit diesen Punkten und der Symmetrieeigenschaft gut gezeichnet werden.

c)

Bestimme die Gesucht ist eine Gleichung der Tangente im Parabelpunkt $N_1(2, 0)$.

Die Tangentensteigung ergibt sich mit der 1. Ableitung.

$$m_1 = f'(2) = 2$$

Ansatz für die Tangente

$$t_1: y = 2x + q$$

q ergibt sich aus der Bedingung, dass die Koordinaten von $N_2(2, 0)$ die Tangentengleichung erfüllen:

$$t_1: y = 2x - 4$$

Wegen $m = \tan \alpha$ schneidet die Parabel die x-Achse in S_1 unter dem Winkel

$$\alpha = \arctan(2) = 63.4^\circ$$

d)

An welcher Stelle ist die Parabeltangente parallel zur Geraden $g: 2x - 3y - 6 = 0$?

Die Steigung der Geraden g ergibt sich aus der expliziten Form der Geradengleichung

$$y = \frac{2}{3}x - 2 \text{ zu } m = \frac{2}{3}$$

Gesucht ist die Stelle x, für die gilt: $f'(x) = 4 - x = \frac{2}{3}$

$$x = \frac{10}{3}$$

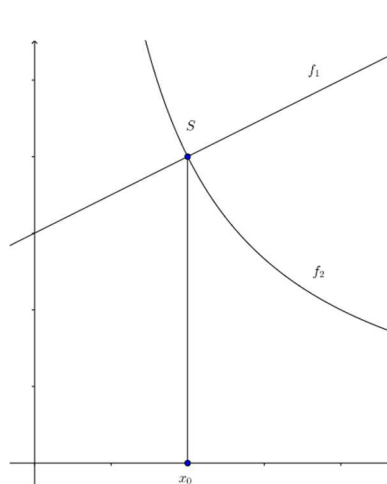
2. Zwei Kurven berühren sich

Es ist zu unterscheiden:

Zwei Kurven schneiden sich
gleiche Funktionswerte

$$f_1(x_0) = f_2(x_0)$$

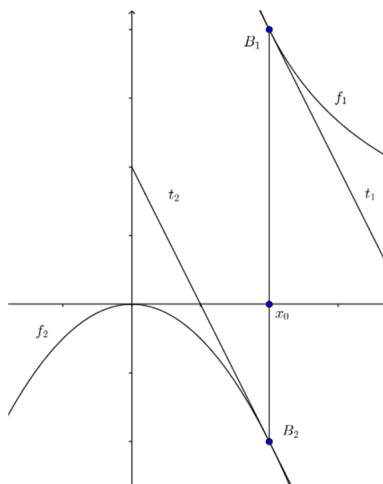
$$f'_1(x_0) \neq f'_2(x_0)$$



gleiche Steigung

$$f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$$

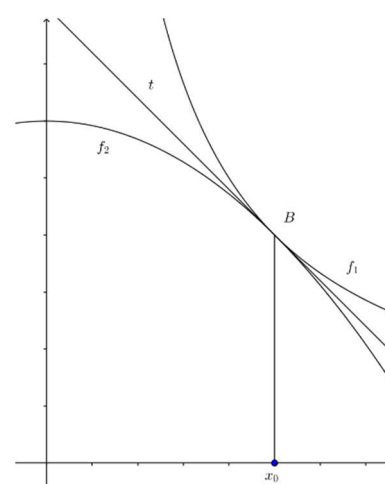
$$f'_1(x_0) = f'_2(x_0)$$



zwei Kurven berühren sich
gleiche Funktionswerte und
gleiche Steigung

$$f_1(x_0) = f_2(x_0)$$

$$f'_1(x_0) = f'_2(x_0)$$



Aufgabe:

Die Parabel mit der Gleichung $y = -x^2$ ist so in y-Richtung zu verschieben, dass sie die Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{2}{x}$ berührt.

Ansatz für die Gleichung der verschobenen Parabel:

$$y = c - x^2.$$

An der Berührstelle x_B stimmen die Funktionswerte überein:

$$\frac{2}{x_B} = c - x_B^2 \quad (1)$$

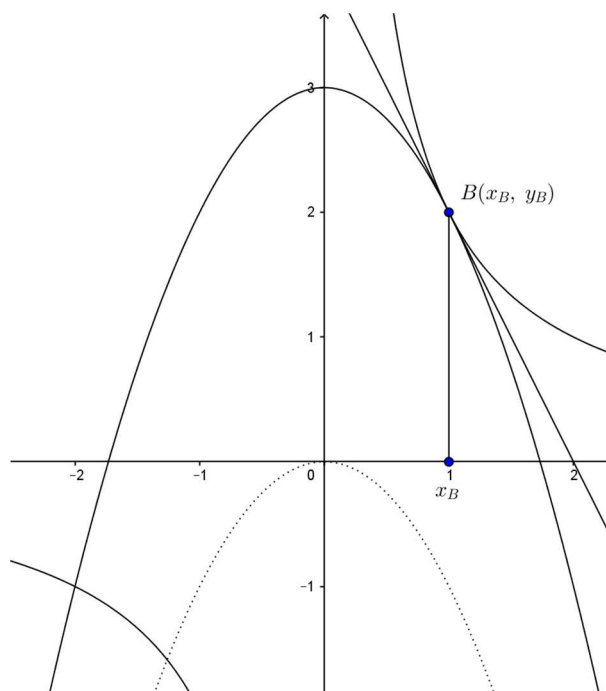
und die 1. Ableitungen

$$-\frac{2}{x_B^2} = -2x_B \quad (2)$$

Aus (2) folgt $x_B^3 = 1$ und damit $x_B = 1$
eingesetzt in (1) ergibt

$$c = 3$$

Koordinaten des Berührungspunkts $B(1,2)$.



Aufgabe:

Vom Punkt A(0, 0) aus sind die Tangenten an die Parabel mit der Gleichung

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2 \text{ zu legen.}$$

$$f'(x) = x - 1$$

Scheitelkoordinaten $S(1, \frac{3}{2})$

Ansatz für die Gleichung der Tangente:

$$y = mx$$

Im Berührungspunkt stimmen überein

- die Funktionswerte

$$mx_B^2 = \frac{1}{2}x_B^2 - x_B + 2 \quad (1)$$

- die 1. Ableitungen

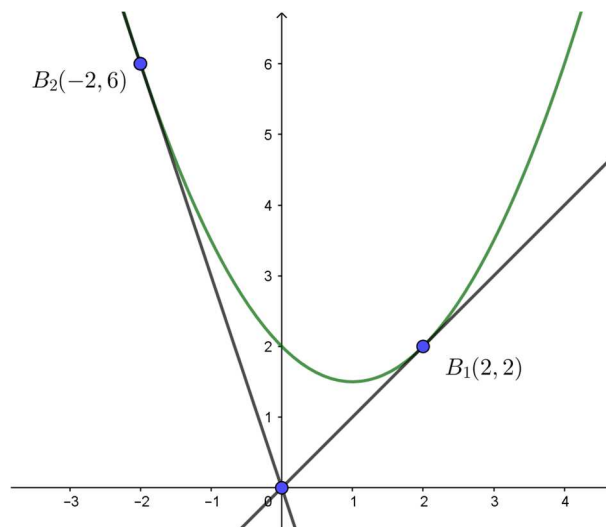
$$m = x_B - 1 \quad (2)$$

eingesetzt in (1)

$$(x_B - 1) \cdot x_B = \frac{1}{2}x_B^2 - x_B + 2$$

mit 2 multiplizieren und vereinfachen $x_B^2 = 4$

$$\begin{array}{ll} 1. \text{ Lösung:} & B_1(2, 2) \quad m_1 = 1 \\ 2. \text{ Lösung:} & B_2(-2, 6) \quad m_2 = -3 \end{array}$$



Übungsaufgaben:

a)

Vom Punkt P(0, -9) aus sind die Tangenten an die Parabel $y = x^2 - 4x$ zu legen.

$$\frac{x^2 - 4x + 9}{x} = 2x - 4 \quad B_1(3, -3) \text{ und } B_2(-3, 21)$$

b)

Vom Punkt P(-3, 1) aus sind die Tangenten an die Hyperbel mit der Gleichung

$$y = \frac{1}{x} \text{ zu legen.}$$

Die Steigung kann auf zwei verschiedene Arten berechnet werden:

- aus der Steigung der Strecke PB:

$$\frac{\frac{1}{x_B} - 1}{x_B + 3}$$

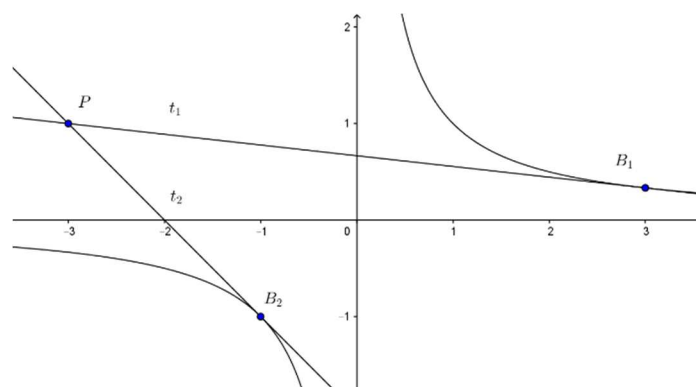
- aus der 1. Ableitung an der Stelle x_B

$$-\frac{1}{x_B^2}$$

$$\text{Gleichsetzen führt auf: } \frac{\frac{1}{x_B} - 1}{x_B + 3} = -\frac{1}{x_B^2}$$

$$x_B = 3 \quad y_B = \frac{1}{3} \quad B_1(3, \frac{1}{3}) \quad t_1: y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}$$

$$x_B = -1 \quad y_B = -1 \quad B_2(-1, -1) \quad t_2: y = -x - 1$$



c)

Die Parabel mit der Gleichung $y = f(x) = 3x^2 - 2x$ wird in y-Richtung verschoben, bis sie die x-Achse berührt. Wie heisst die Gleichung der verschobenen Parabel?

Lösung:

$$y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$$

d)

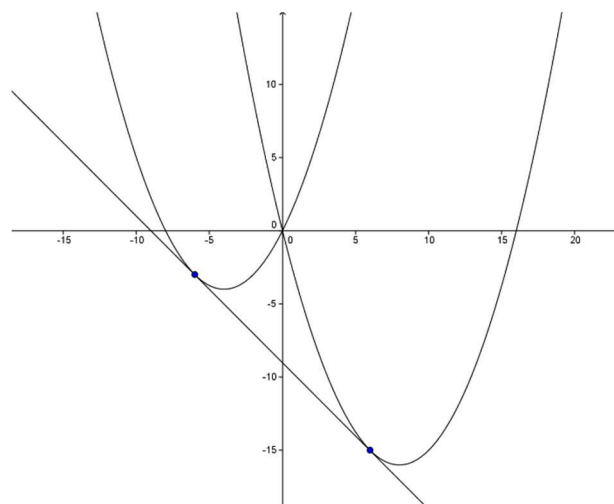
Der Parameter b ist so zu bestimmen, dass die Gerade g: $y = -x - 9$ Tangente an die Parabel p: $y = \frac{1}{4}x^2 + bx$ ist.

Lösung:

$$\begin{array}{ll} b = 2 & B(-6, -3) \text{ oder} \\ b = -4 & B(6, -15) \end{array}$$

Variante:

Lösung mit der Diskriminantenmethode



e)

Für welchen Wert des Parameters a ist die Gerade g: $y = x + \frac{1}{2}$ Tangente an die Parabel p: $y = ax^2 + 2x$?

Lösung:

$$a = -\frac{1}{2}$$

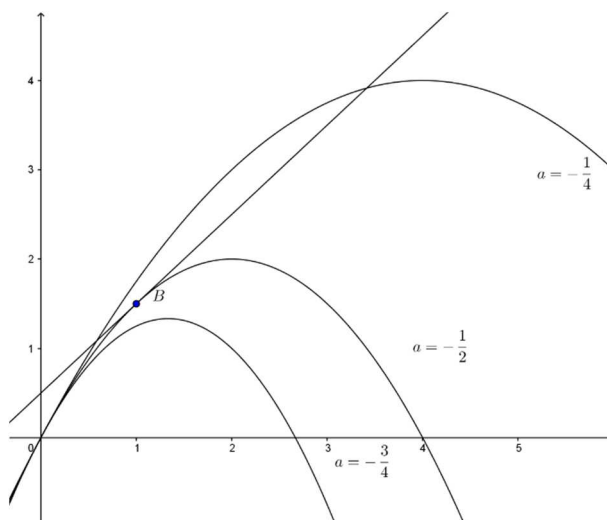
Berührungspunkt $B(1, \frac{3}{2})$

Variante:

Lösung mit der Diskriminantenmethode:

$$D = 1 + 2a = 0$$

In der Skizze sind die drei Fälle dargestellt



3. Zwei Kurven schneiden sich unter einem rechten Winkel

Im Schnittpunkt S

- stimmen die Funktionswerte überein
- ist das Produkt der 1. Ableitungen gleich -1

$$f_1(x_s) = f_2(x_s)$$

$$f'_1(x_s) \cdot f'_2(x_s) = -1$$

Aufgabe:

Die Parabel $y = -\frac{1}{8}x^2$ ist so in y-Richtung zu verschieben, dass sie die Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$ senkrecht schneidet.

gleiche Funktionswerte:

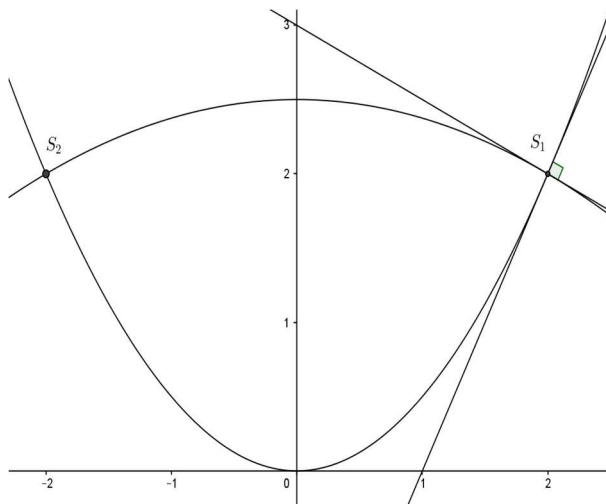
$$\frac{1}{2}x_s^2 = -\frac{1}{8}x_s^2 + c \quad (1)$$

Produkt der Ableitungen

$$x_s \cdot \left(-\frac{x_s}{4}\right) = -1 \quad (2)$$

Aus (2) folgt $x_s^2 = 4$ und schliesslich

$x_s = \pm 2$. Mit (1) erhält man $c = \frac{5}{2}$ und die Koordinaten der beiden Schnittpunkte $S_{1,2}(\pm 2, 2)$



Übungsaufgaben:

a)

Die 1. Winkelhalbierende ist so in y-Richtung zu verschieben, dass sie die Parabel mit der Gleichung $y = \frac{2}{5}x^2$ senkrecht schneidet.

Ansatz für die Gleichung der verschobenen

Geraden:

$$y = x + q$$

Im Schnittpunkt gilt:

- die Funktionswerte sind gleich

$$x_s + q = \frac{2}{5}x_s^2 \quad (1)$$

- Produkt der Steigungen

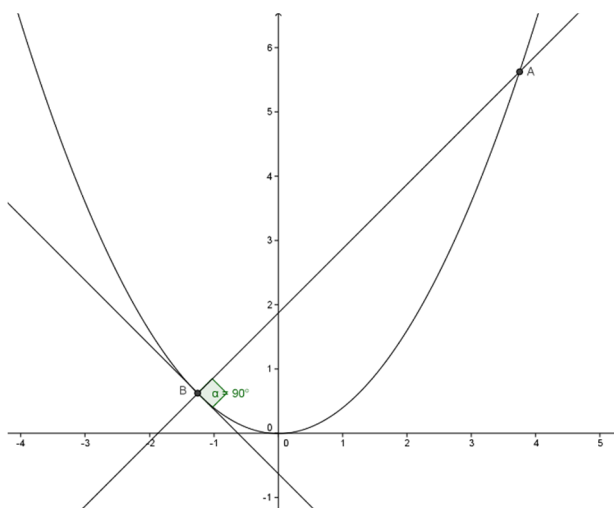
$$1 \cdot \left(\frac{4}{5}x_s\right) = -1$$

$$x_s = -\frac{5}{4}$$

eingesetzt in (1) $q = \frac{15}{8}$

Gleichung der verschobenen Geraden:

$$y = x + \frac{15}{8}$$



b)

Welche Gerade durch den Nullpunkt schneidet die Parabel mit der Gleichung $y = 4 - x^2$ in einem rechten Winkel?

Lösung: $y = \pm \sqrt{\frac{7}{2}} \cdot x$

4. Schnittwinkel zweier Kurven

Der nicht stumpfe Schnittwinkel zweier Kurven wird von den Tangenten im Schnittpunkt eingeschlossen

Aufgabe:

Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Kurven

$$k_1: y = f(x) = \frac{1}{8}x^2 \quad \text{und} \quad k_2: y = g(x) = \frac{1}{x}$$

Im Schnittpunkt stimmen die Funktionswerte überein:

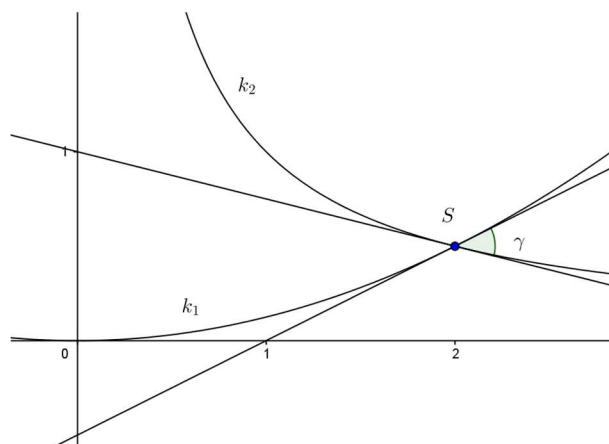
$$\frac{1}{8}x^2 = \frac{1}{x} \quad \text{oder} \quad x = 2$$

$$\text{Wegen } f'(x) = \frac{1}{4}x \quad \text{bzw.} \quad g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

gilt für die Tangentensteigungen der beiden Kurven im Schnittpunkt $S(2, \frac{1}{2})$:

$$m_1 = f'(2) = \frac{1}{2} \quad \text{bzw.}$$

$$m_2 = g'(2) = -\frac{1}{4}$$



Der Zwischenwinkel kann mit der Zwischenwinkelformel direkt bestimmt werden:

$$\tan \gamma = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{4})}{1 + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{4})} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = 1 \quad \gamma = \arctan(1) \approx 45.0^\circ$$

Übungsaufgabe:

Unter welchem spitzen Winkel schneidet die Gerade $g: y = 2x - 3$ die Parabel $p: y = x^2$?

Lösung:

Im Schnittpunkt $S(-1,1)$ ist der Schnittwinkel: $\gamma_1 = 53.13^\circ$

Im Schnittpunkt $S(3,9)$ ist der Schnittwinkel: $\gamma_2 = 17.10^\circ$

5. vorgegebene Eigenschaften:

Aufgabe:

Eine quadratische Parabel schneidet die y-Achse in A(0,-1) und berührt die Gerade $g: y = 3x - 4$ an der Stelle $x = 3$. Wie heisst ihre Gleichung

Die fehlende y-Koordinate des Berührungspunktes B und die Tangentensteigung in B ergeben sich aus der Gleichung der Tangente g zu $y = 5$ und $m = 3$.

Ansatz für die Parabelgleichung:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \quad f'(x) = 2ax + b$$

$$f(0) = c = -1$$

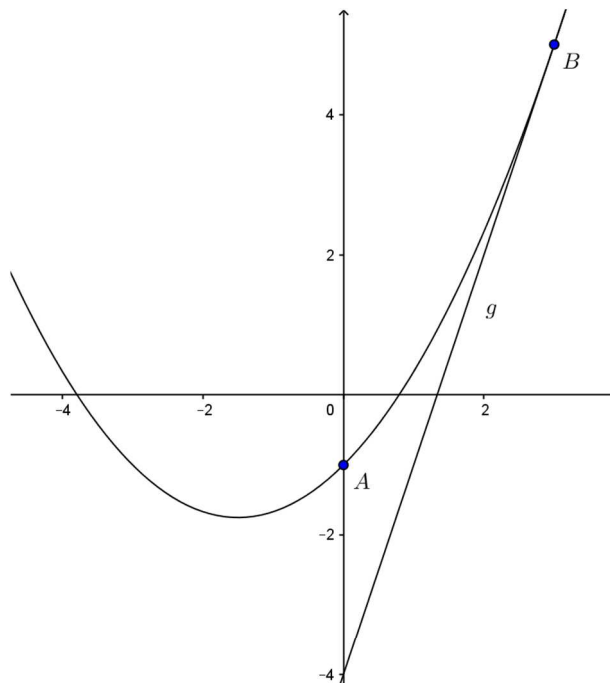
$$f(3) = 5 \quad 9a + 3b - 1 = 5$$

$$f'(3) = 3 \quad 6a + b = 3$$

Das Gleichungssystem hat die Lösungen

$$a = \frac{1}{3} \text{ und } b = 1$$

Gesuchte Parabelgleichung: $y = \frac{1}{3}x^2 + x - 1$



Übungsaufgaben:

a)

Welche quadratische Parabel durch A(0/0)

schneidet die Parabel mit der Gleichung

$$y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 \text{ in } B(4/?) \text{ rechtwinklig?}$$

Ansatz für die Gleichung der gesuchten

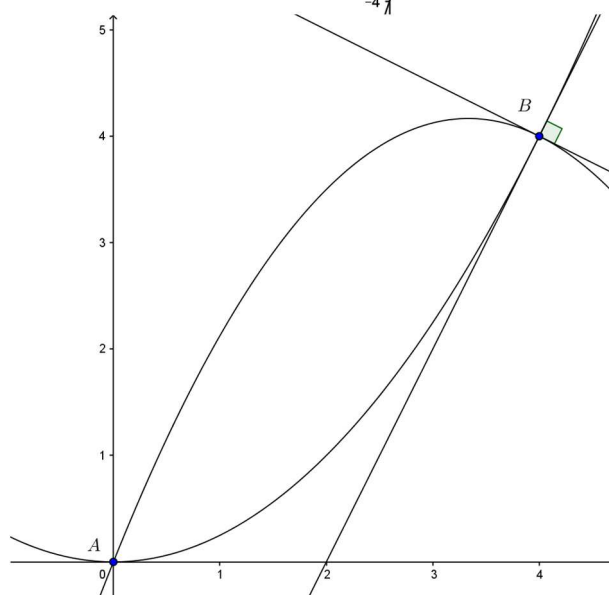
Parabel:

$$y = g(x) = ax^2 + bx$$

$$f(4) = g(4) \quad 16a + 4b = 4$$

$$f'(4) \cdot g'(4) = -1 \quad 2 \cdot (8a + b) = -1$$

Lösung: $y = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{2}x$



b)

Eine quadratische Parabel geht durch die Punkte A(0,0) und B(4,3). Die Tangente in B ist zur Geraden $g: 2x - y + 3 = 0$ parallel. Wie heisst die Parabelgleichung?

Ansatz für die Parabelgleichung:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

A(0,0) ist Parabelpunkt:

$$f(0) = 0 \quad c = 0$$

B(4,3) ist Parabelpunkt:

$$f(4) = 3 \quad 16a + 4b = 3 \quad (1)$$

Die Gerade g hat die

Steigung $m = 2$

$$f'(4) = 2 \quad 8a + b = 2 \quad (2)$$

Gleichungssystem

$$\begin{cases} 16a + 4b = 3 \\ 8a + b = 2 \end{cases} \cdot (-4)$$

$$a = \frac{5}{16} \quad b = -\frac{1}{2}$$

Gesuchte Parabelgleichung

$$y = f(x) = \frac{5}{16}x^2 - \frac{1}{2}x$$

