10. Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit

10.1 Grenzwerte von Funktionen

Der bisher intuitiv verwendete Grenzwertbegriff soll im Folgenden präzisiert werden.

Einführende Beispiele:
Für die folgenden Funktion wird das Verhalten in einer Links- bzw. Rechtsumgebung der Stelle x_0 untersucht:

a)

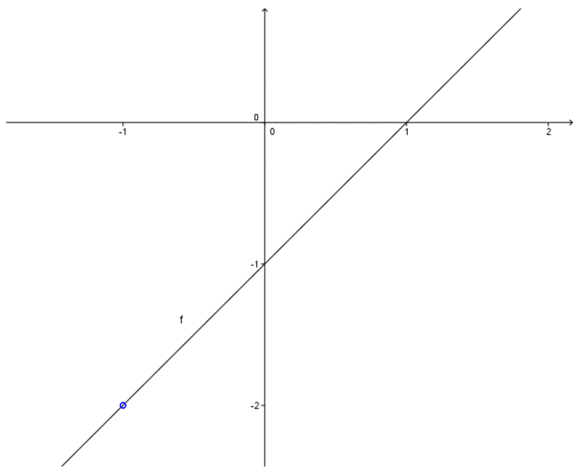
$f(x) = x^2 \qquad x_0 = 2$

Bei Annäherung an die Stelle $x_0 = 2$, streben die Funktionswerte gegen den Wert 4.

Wir schreiben $\qquad g = \lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$

b)

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} \qquad x_0 = -1$

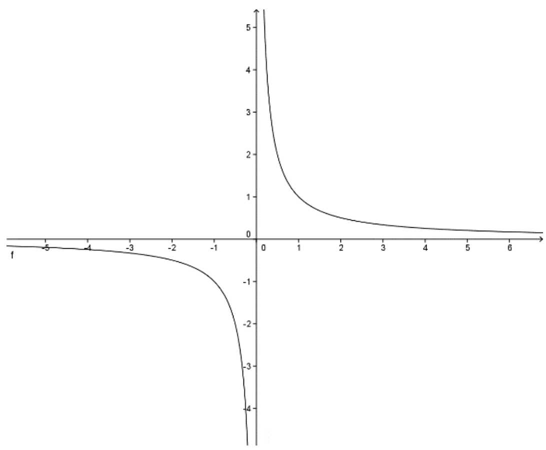


Bei Annäherung an die Definitionslücke $x_0 = -1$ der Funktion f nähern sich die Funktionswerte dem Wert -2.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x - 1) = -2$$

c)

$f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad x_0 = 0$



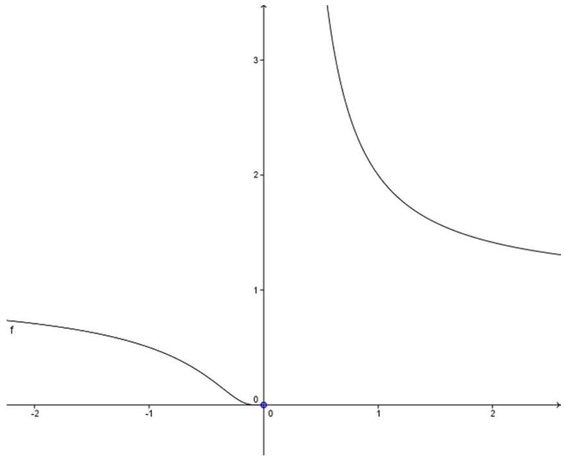
Bei Annäherung an die Definitionslücke $x_0 = 0$ der Funktion f werden die Beträge der Funktionswerte grösser als jede noch so grosse positive Zahl,
für x wachsend gegen 0 gegen + ∞,
für x fallend gegen 0 gegen - ∞ .
Wir schreiben dafür:

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty \text{ und } \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty .$$

Es existiert kein endlicher Grenzwert.

d)

$f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ $\qquad x_0 = 0$



Der linksseitige Grenzwert ist 0, symbolisch:

$\lim\limits_{x \uparrow 0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$

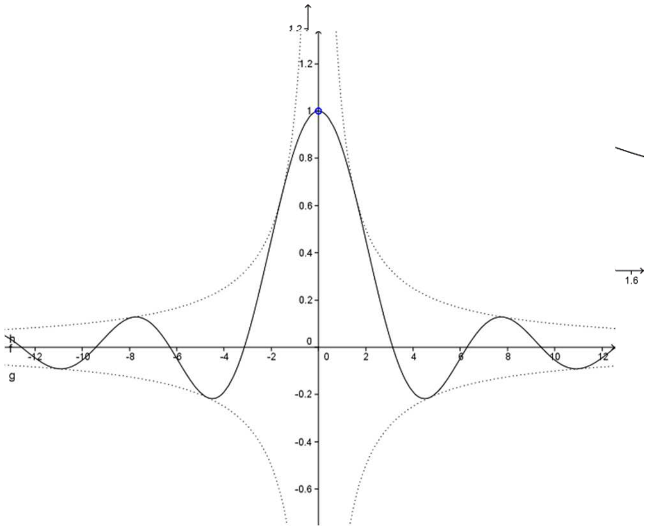
Der rechtseitige Grenzwert existiert nicht, die Funktionswerte werden grösser als jede noch so grosse positive Zahl. Wir schreiben dafür :

$\lim\limits_{x \downarrow 0} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$

e)

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad x_0 = 0$

Es existiert auch kein linksseitiger oder rechtsseitiger Grenzwert, da in jeder noch so kleinen Umgebung von 0 die Funktionswerte zwischen -1 und 1 oszillieren.



f)

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\qquad x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Der links- und der rechtsseitige Grenzwert stimmen überein. Die Hyperbeln mit den Gleichungen $y = \pm\frac{1}{x}$ umhüllen den Graphen der Funktion f.

Definition 1
Die Zahl g heisst Limes der Funktion f an der Stelle x_0, wenn f(x) beliebig nahe bei g liegt für alle $x \neq x_0$, die genügend nahe bei x_0 sind.

Definition 2:
Zu jedem ε > 0 existiert ein δ > 0 so dass gilt:
$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$

Definition 3:
Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ist gleich g, falls für jede Folge (x_n) mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ mit $x_n \neq x_0$, gilt: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x_n) = g$.

Falls der (beidseitige) Grenzwert nicht existiert, existiert allenfalls der links- oder rechtsseitige Grenzwert,

Es ist zu beachten, dass die Funktion f an der Stelle x_0 nicht definiert sein muss.

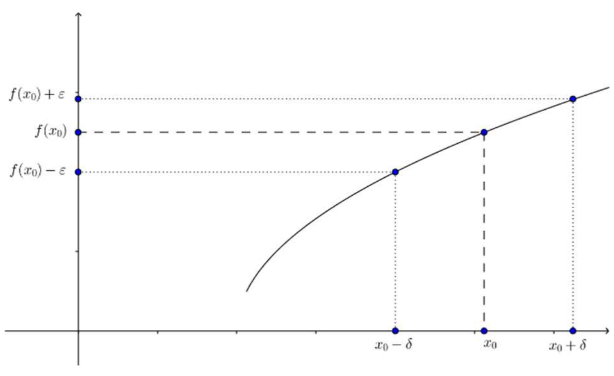
Schon bisher wurden Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen wie etwa die folgenden angewendet:
Der Grenzwert einer Summe (eines Produkts) ist gleich der Summe (dem Produkt) der Grenzwerte. (siehe dazu die Zusammenstellung in FuT Ziffer 5.3).

10.2 Stetigkeit

Stetigkeit einer Funktion bedeutet anschaulich, dass der Graph keine Sprünge macht (natura non facit saltus). Er kann „ohne Abheben des Bleistifts“ gezeichnet werden. Kleine Änderungen von x bewirken kleine Änderungen des Funktionswerts. Der Funktionswert f(x) unterscheidet sich beliebig wenig von $f(x_0)$ sofern nur x genügend nahe bei x_0 liegt.

Definition 1.
Eine in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion heisst stetig an der Stelle x_0, wenn an dieser Stelle der linksseitige, der rechtsseitige Grenzwert und der Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmen, d.h. es gilt:
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(x_0)$

Definition 2:
F heisst stetig an der Stelle x_0 im Definitionsbereich von f, wenn es zu jedem ε > 0 ein δ > 0 existiert, so dass gilt:
$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$



Beispiel:
$f(x) = x^2$ ist an der Stelle $x_0 = 2$ stetig, denn an dieser Stelle stimmen links- und rechtsseitiger Grenzwert mit dem Funktionswert überein. Die Quadratfunktion ist für alle reellen Zahlen stetig. Später wird sich ergeben, dass Polynomfunktionen, Exponential- und Logarithmus- und trigonometrischen Funktionen in ihrem ganzen Definitionsbereich stetig sind.

Der Begriff der Stetigkeit setzt voraus, dass die Funktion an der betrachteten Stelle definiert ist. Stellen, die zum Definitionsbereich gehören, die Stetigkeitsdefinition aber nicht erfüllen, heissen Unstetigkeitsstellen.

Eine Definitionslücke x_0 lässt sich beheben, wenn der Grenzwert bei x_0.existiert. Man setzt in diesem Fall $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(x_0)$, womit die Funktion f an der Stelle x_0 stetig ist.

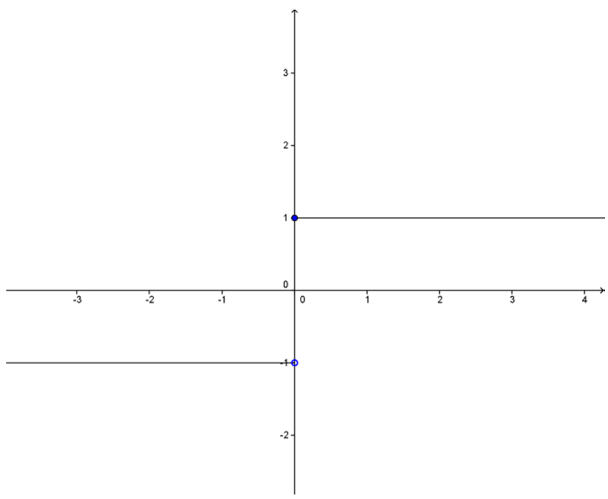
Beispiele:
a)
Die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x+1}$ ist zunächst an der Stelle $x_0 = -1$ nicht definiert. Die Definitionslücke ist aber - da wie schon erwähnt $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x+1} = -2$ ist - durch die Definition $f(-1) = -2$ behebbar, womit die neue Funktion überall stetig ist.

b)
Die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ist zunächst an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert. Die Definitionslücke ist aber durch die Definition $f(0) = 1$ behebbar, womit die neue Funktion überall stetig ist.

Beispiel einer Funktion, die an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Ein weiteres Beispiel ist die im Kapitel „Funktionen“ erwähnte Gauss’sche Klammerfunktion.



Unstetigkeitsstellen treten z.B. in der Praxis bei der Telefon-Taxfunktion auf.

10.3 Differenzierbarkeit

Differenzierbarkeit an der Stelle x_0 bedeutet nach Definition, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

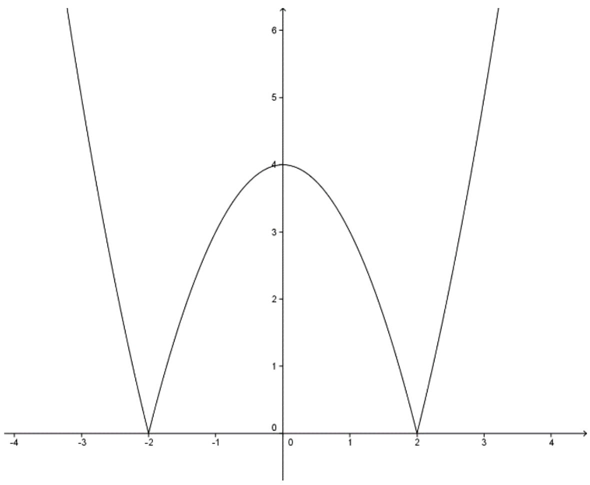
Die häufigsten Fälle von Nicht-Differenzierbarkeit sind die folgenden:

1.
f ist an der Stelle x_0 nicht stetig (der Graph von f hat einen Sprung, vgl. dazu das letzte Beispiel im Abschnitt b) Stetigkeit.

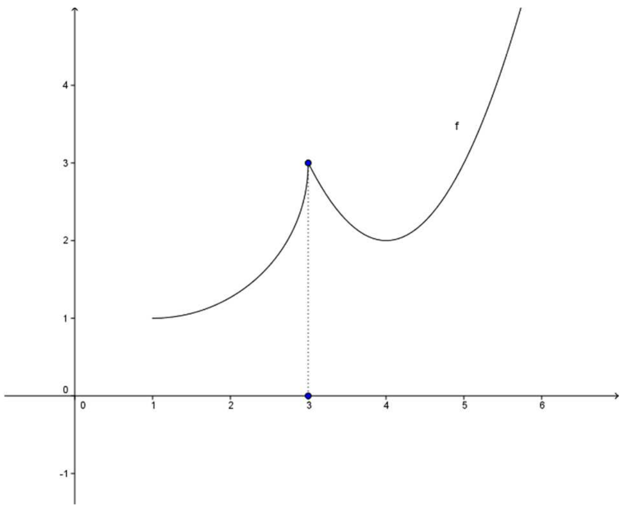
2.
Der Graph von f hat an der Stelle x_0 eine Ecke.

Beispiele:
a)
Bei der Betragsfunktion ist an der Stelle 0 der linksseitige Grenzwert der Sekantensteigung -1. Dieser Grenzwert stimmt nicht mit dem rechtsseitigen Grenzwert der Sekantensteigung +1 überein.

b)
Die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = |4 - x^2|$ ist an den Stellen 2 bzw. -2 nicht differenzierbar



c)
Graph einer Funktion, die an der Stelle $x_0 = 3$ nicht differenzierbar ist.



3.
Der Graph von f hat an der Stelle x_0 eine vertikale Tangente
Beispiele:
$f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x = 0$

Anschaulich bedeutet die Differenzierbarkeit einer Funktion f an der Stelle x_0, dass der Graph von f bei x_0 eine eindeutig bestimmte (endliche) Tangentensteigung hat. Es leuchtet deshalb ein, dass f dann erst recht an der Stelle x_0 stetig ist. Es gilt also der

> Satz:
> Wenn f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, dann ist f an der Stelle x_0 auch stetig.

Beweis:
Es ist nach Definition der Stetigkeit zu zeigen, dass der Grenzwert von f für x gegen x_0 existiert und mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt.

Ist f an der Stelle x_0 differenzierbar, dann strebt

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0) \qquad \text{wobei } x \neq x_0$$

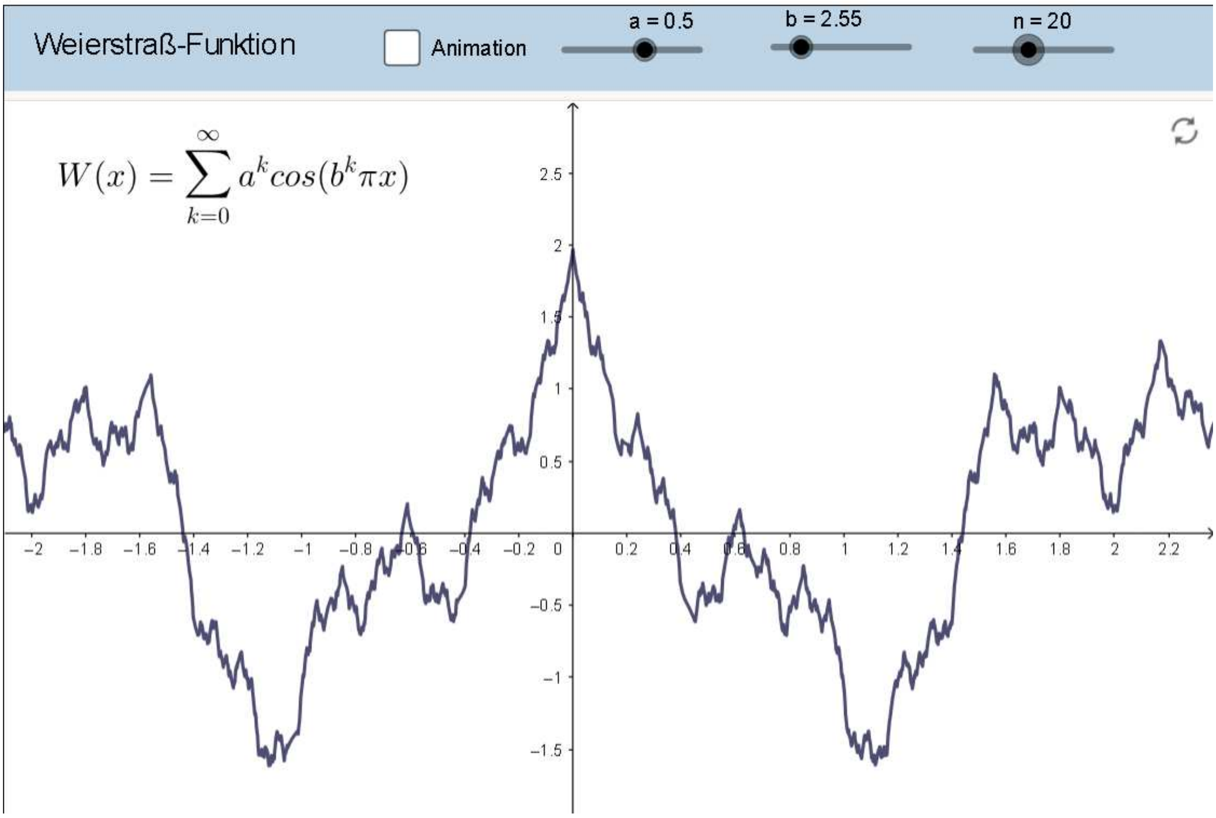
Nach Multiplikation mit $(x - x_0 \neq 0$ folgt:

$$f(x)-f(x_0) \to f'(x_0)(x-x_0)$$

Die rechte Seite strebt mit $x \to x_0$ gegen 0, somit auch die linke Seite. Also gilt:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Die Umkehrung des Satzes gilt hingegen nicht, d.h. eine stetige Funktion braucht nicht differenzierbar zu sein. So ist etwa die Betragsfunktion an der Stelle 0 stetig, aber nicht differenzierbar.
Es können sogar Funktionen konstruiert werden, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar sind (z.B. die Weierstrassfunktion → Wikipedia).

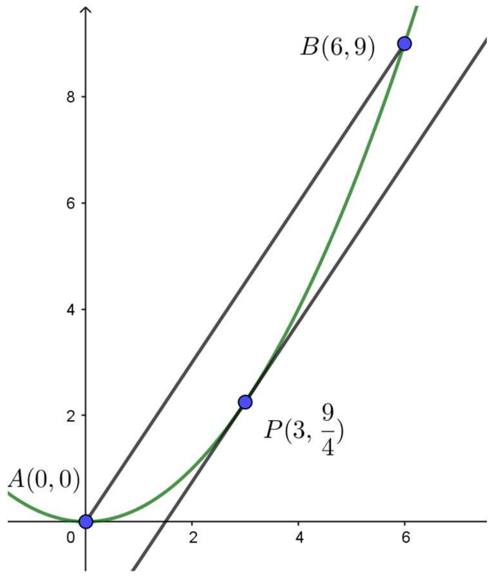


10.4 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Einführende Aufgabe:

Auf dem Graphen der Funktion
$f(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad x \in [0,6]$ ist ein Punkt P so zu suchen, dass die Tangente in P zur Sekanten A(0,0) B(6,9) parallel ist.

Aus der Bedingung $f'(x) = \frac{1}{2}x = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$
folgt $x = 3$
Die Tangente im Parabelpunkt $P\left(3, \frac{9}{4}\right)$ ist zur Sekante AB parallel.

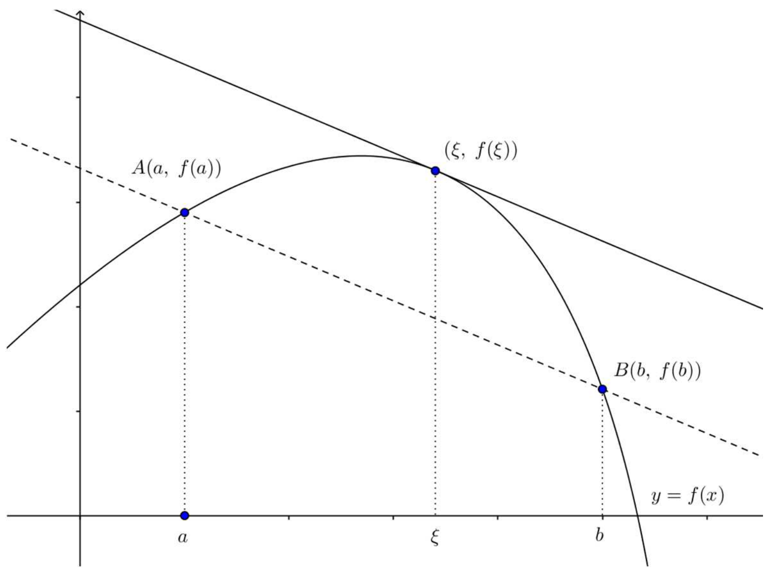


Diese Aussage kann verallgemeinert werden:

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Voraussetzung.
Die Funktion f sei stetig im abgeschlossenen Intervall [a,b] und differenzierbar im offenen Intervall (a,b).

Behauptung:
Es gibt eine Stelle $\xi \in$ (a,b) mit
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

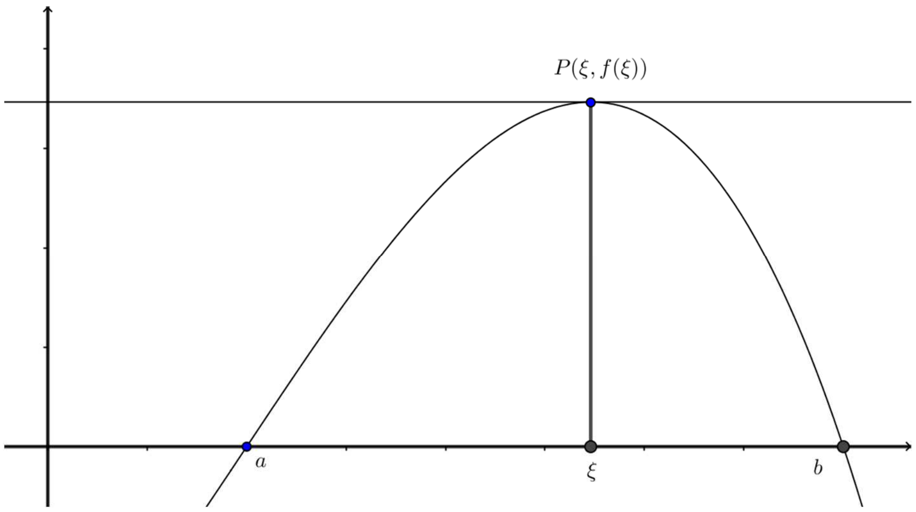


Der Satz bedeutet anschaulich, dass es eine Stelle ξ gibt, für die die Tangentensteigung des Graphen mit der Steigung der Sekante AB übereinstimmt.

Bemerkung:
Die Umkehrung gilt hingegen nicht:
Wie das Beispiel
$f(x) = x^3, \quad x \in [-1,1]$ zeigt, gibt es umgekehrt zu einer vorgegebenen Tangente nicht unbedingt eine Sekante mit gleicher Steigung (Tangente im Ursprung).

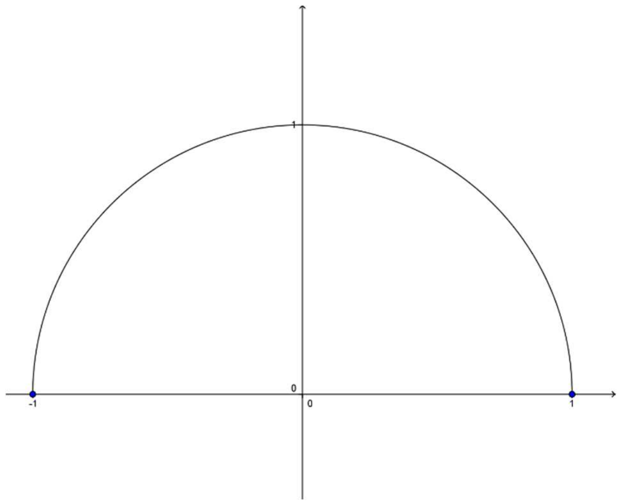
Im Spezialfall $f(a) = f(b) = 0$ erhält man den

Satz von Rolle (Michel Rolle 1652-1719):
Voraussetzung:
Die Funktion f sei stetig im abgeschlossenen Intervall [a,b] und differenzierbar im offenen Intervall (a,b) und es gelte: $f(a) = f(b) = 0$
Behauptung:
Es gibt eine Stelle $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$



Bemerkung:
Der Satz sagt mit andern Worten aus, dass es zwischen zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion mindestens eine Nullstelle ihrer Ableitung gibt. Anschaulich bedeutet dies, dass der Graph der Funktion mindestens eine horizontale Tangente hat.

Bemerkung:
Wie das Beispiel
$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad x \in [-1,1]$
zeigt, ist die Differenzierbarkeit an den Intervallgrenzen nicht vorausgesetzt.

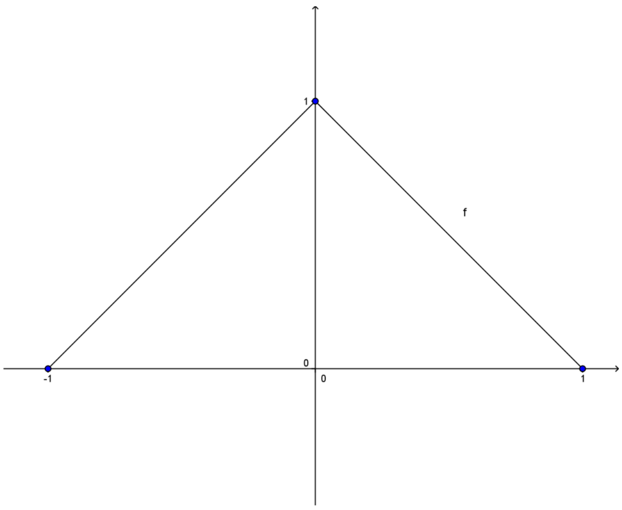


Bemerkung:

Wie das Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \le x \le 0 \\ 1-x & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

zeigt, ist die Differenzierbarkeit im Innern wesentlich.



Eine Anwendung des Mittelwertsatzes:

Beweis der Sätze von Bernoulli-Hospital bzw. Berechnung von unbestimmten Ausdrücken

Setzt man beim Mittelwertsatz $a = x_0$, $b = x_0 + h$, $\xi = x_0 + \eta \cdot h$ mit $0 < \eta < 1$ dann gilt:

$$f'(x_0 + \eta h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$ und damit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0 + \eta h) .$$

Angewendet auf das Beispiel $f\left(x\right) = e^x$

gilt also:

$$e^x = 1 + x \cdot f'(\eta x) = 1 + x \cdot e^{\eta x}$$

woraus für den Grenzwert folgt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} e^{\eta x} = 1 .$$