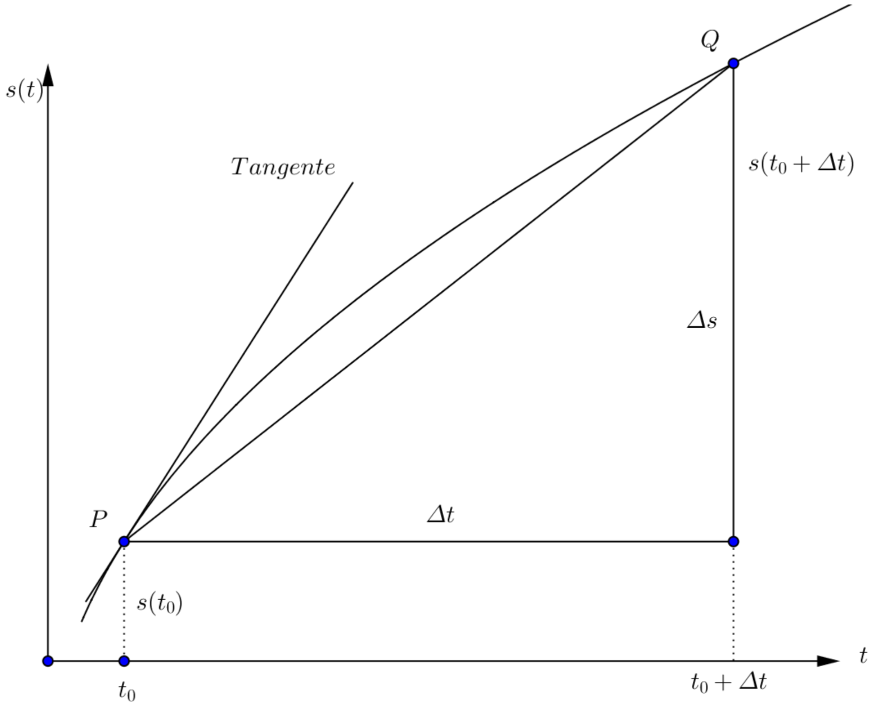
8. Anwendungen der Differentialrechnung

Beispiele aus der Physik:

Momentangeschwindigkeit

Die Bewegung eines Massenpunktes wird mathematisch durch die zugrundeliegende Weg-Zeitfunktion beschrieben, d.h. es wird angegeben, welche Wegstrecke s in Funktion der Zeit t zurückgelegt wird.



Hat der Massenpunkt zur Zeit t die Strecke s(t) zurückgelegt und legt er im folgenden Zeitintervall Δt die Strecke Δs zurück, so erreicht er in diesem Intervall die

mittlere Geschwindigkeit: $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Der mittleren Geschwindigkeit entspricht im Graphen der Weg-Zeitfunktion die Steigung der Sekante PQ. Sie hängt i.a. nicht nur von t, sondern auch von Δt ab.

Durch Grenzwertübergang für $\Delta t \to 0$ erhält aus der mittleren Geschwindigkeit die Momentangeschwindigkeit:

Definition:
Unter der **Momentangeschwindigkeit** verstehen wir die Ableitung der Weg-Zeit-Funktion nach der Zeit $v = \dot{s} = \frac{ds}{dt}$
Der Momentangeschwindigkeit entspricht im Graphen der Weg-Zeitfunktion die Tangentensteigung in P (als Grenzwert der Sekantensteigungen).

Ableitungen nach der Zeit werden nach Newton 1691 mit einem Punkt (statt Strich bezeichnet).

Beispiele:

1. Fallgesetz $s(t) = \frac{1}{2} g t^2$

Der Graph der Funktion ist eine Ursprungsparabel.

Mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall Δt: $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{2} g \cdot (2t_0 + \Delta t)$

geometrisch: Steigung der Sekante PQ.

Momentangeschwindigkeit: $v = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = gt$

2. **Gleichmässig beschleunigte Bewegung** $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

s_0: Standort,

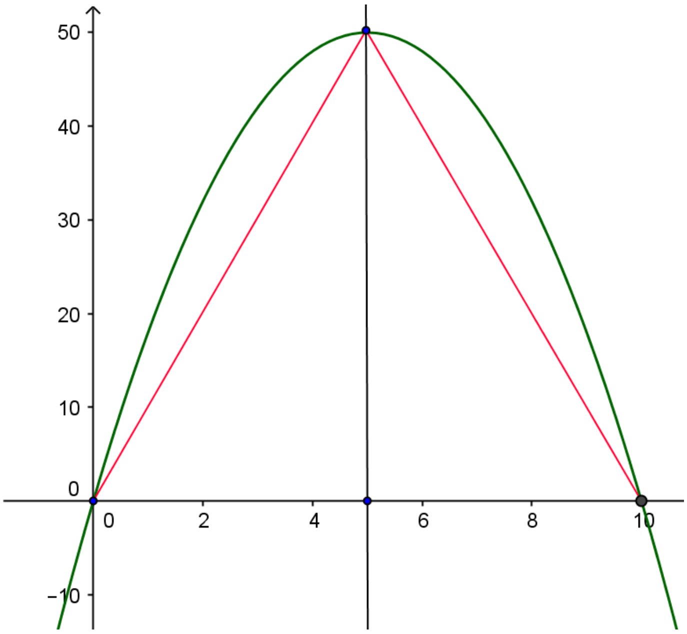
Momentangeschwindigkeit $v(t) = v_0 + at$

v_0: Anfangsgschwindigkeit

Übungsaufgaben:

1.

Anna und Beat rennen zum selben Zeitpunkt los zu einem 50 m entfernten Punkt und wieder zurück, nach 10 Sekunden sind sie wieder am Start. Das Bild zeigt für beide Sportler die zurückgelegte Distanz in Abhängigkeit von der Zeit.



a) Wer ist schneller?

b) Zu welchem Zeitpunkt ist Anna am weitesten vor Beat und umgekehrt?

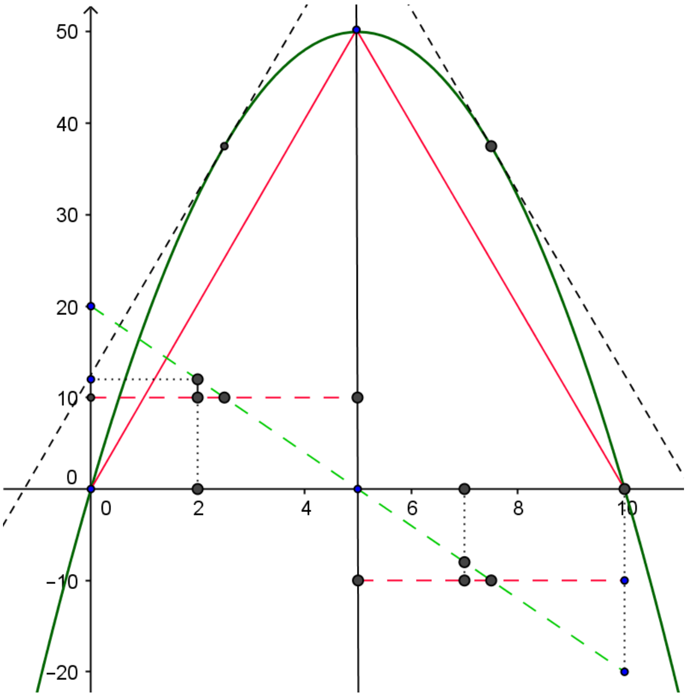
c) Wie gross ist die Geschwindigkeit von Anna und Beat nach 2 und nach 7 Sekunden?

d) Wann springt Anna schneller als Beat?

e) Während der Lauf von Anna theoretisch möglich ist, kann jener von Beat auch theoretisch nicht durchgeführt werden. Weshalb?

PS: Weltrekord für 100 m ca. 9.6 s! (29.12.2008)

Lösung:
Die Aufgabe kann qualitativ oder quantitativ gelöst werden.
Weg-Zeitfunktion von Anna (grün)
$s_A(t) = -2t^2 + 20t$
Weg-Zeitfunktion von Berta (rot)
$s_B(t) = 10t$ für $0 \le t \le 5$ bzw.
$s_B(t) = 100 - 10t$ für $5 < t \le 10$



Geschwindigkeitsfunktion von A:
$v_A(t) = -4t + 20$
Geschwindigkeitsfunktion von B:
$v_B(t) = 10$ bzw.
Geschwindigkeitsfunktion von B:
$v_A(t) = -10 \; 5 < t \le 10$

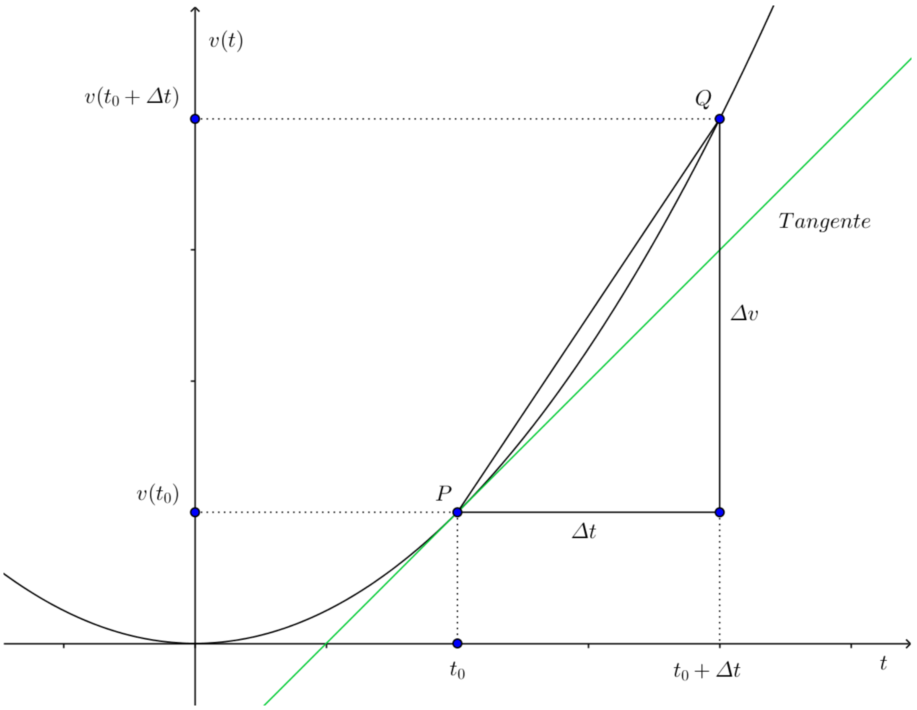
a)

A und B erreichen das Ziel gleichzeitig
b)
$s_A(t) - s_B(t) = -2t^2 + 10t = 2t(t-5)$
Zur Zeit $t = 2.5$ hat A den grössten Vorsprung vor B. Zur Zeit $t = 7.5$ hat B den grössten Vorsprung vor A.
c)
A: $v_A(2) = 12$ bzw. $v_A(7) = -8$, B: $v_B(2) = 10$ bzw. $v_B(7) = -10$
d)
von $t = 0 \; bis \; t = 2.5$ und von $t = 7.5 \; bis \; t = 10$
e)
Da der Graph der Ortsfunktion von Beat eine Spitze hat, ist $s_B(t)$ an der Stelle t = 5 nicht differenzierbar.

2.
In ein kegelförmiges Gefäss werden pro Sekunde q Liter Wasser gegossen. Mit welcher Geschwindigkeit steigt der Wasserpegel?

Lösung:
Die Pegelhöhe h(t) ist proportional zu $t^{\frac{1}{3}}$,
die Geschwindigkeit $\dot{h}(t)$ ist also proportional zu $\frac{1}{3} \cdot t^{-\frac{2}{3}}$

Momentanbeschleunigung



Hat der Massenpunkt zur Zeit t_0 die Geschwindigkeit v_0 und verändert sich die Geschwindigkeit im folgenden Zeitintervall um Δv, so beträgt nach Definition die mittlere Beschleunigung zwischen t und t + Δt

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Der mittleren Beschleunigung entspricht im Graphen der Geschwindigkeit-Zeitfunktion die Steigung der Sekante PQ

Durch Grenzwertübergang für $\Delta t \to 0$ erhält aus der mittleren Beschleunigung die Momentanbeschleunigung:

Definition:
Unter der **Momentanbeschleunigung** verstehen wir die Ableitung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion nach der Zeit

$$a = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}$$

Die Momentanbeschleunigung ist die zweite Ableitung der Weg-Zeitfunktion.

Der Momentanbeschleunigung entspricht im Graphen der Geschwindigkeit-Zeitfunktion die grün dargestellte Tangentensteigung in P (als Grenzwert der Sekantensteigungen).

Beispiele:

1. Freier Fall $s = \frac{1}{2} g t^2$

Momentangeschwindigkeit: $v = gt$

Momentanbeschleunigung: $a = g$

2. Harmonische Schwingung $y = \hat{y} \sin(\omega t + \varphi_0)$

$\hat{y}$: Amplitude

$\omega t + \varphi_0$: momentane Phase

φ_0: Nullphase

Geschwindigkeit: $v = \dot{y} = \omega \hat{y} \cos(\omega t + \varphi_0)$

Beschleunigung: $a = \dot{v} = \ddot{y} = -\omega^2 \hat{y} \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y$

Die Beziehung zwischen einer Funktion y und ihrer 2. Ableitung $\ddot{y}$ ist ein Beispiel für eine sogenannte → Differentialgleichung.

Als weitere Anwendungen der 1. Ableitung seien erwähnt:

Definition der Stromstärke: $I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$

Radioaktiver Zerfall: $\dot{N} = \frac{dN}{dt} = -\lambda N$

Die momentane Zerfallsrate ist proportional zu der Anzahl N(t) zur Zeit t noch vorhandenen Kerne: λ: Zerfallskonstante

Ein Beispiel aus der Wirtschaft. Grenzkosten

Es bedeute C(x) die Kosten für die Produktion von x Einheiten. $C(x+1) - C(x)$ sind dann die zusätzlichen Kosten für die Herstellung einer weiteren Einheit. Unter den Grenzkosten versteht man:

Grenzkosten $C'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h}$

Die Grenzkosten sind also annähernd gleich den Mehrkosten, um eine weitere Einheit zu produzieren.

Bemerkung:
Ökonomen weisen mit dem Zusatz Grenz- oft auf eine 1. Ableitung hin.

Differentialgleichungen

Viele Vorgänge in der Natur können durch sogenannte Differentialgleichungen (DGl.) beschrieben werden. Unter einer DGl. versteht man eine Gleichung, in der eine unbekannte Funktion zusammen mit ihren Ableitungen (und den Variablen) vorkommt.
Beim Aufstellen einer DGl. trifft man i.a. vereinfachende Annahmen, d.h. man beschreibt die Wirklichkeit durch ein mathematisches Modell.

Als Beispiele seien erwähnt die
1.
DGl. für lineares Wachstum:
Die momentane Wachstumsrate ist konstant:
DGl. $\dot{y} = k$ Lösung $y = kt + c$

2.
DGl. für exponentielles Wachstum bzw. für den radioaktiven Zerfall mit der vereinfachenden Annahme: die momentane Wachstumsrate ist zum Funktionswert proportional
DGl. $\dot{y} = ky$ für k > 0 exp. Wachstum Lösung $y = c \cdot e^{kt}$
$\dot{y} = ky$ für k = -λ < 0 exp. Zerfall Lösung $y = c \cdot e^{-\lambda t}$

3.
Differentialgleichung der harmonischen Schwingung:
DGl. $\ddot{y} = -\omega^2 y$ Lösung $y = \hat{y}\sin(\omega t + \varphi_0)$