6. Weitere Ableitungsregeln

Die Ableitung einer Summe ist gleich der Summe der Ableitungen. Gilt eine entsprechende Vertauschungsaussage auch für das Produkt?

Test an einem Beispiel:

$\left(x\cdot\left(x^2+1\right)\right)' = \left(x^3+x\right)' = 3x^2+1 \neq 1\cdot 2x$ Die Ableitung eines Produkts ist **nicht** gleich dem Produkt der Ableitungen

Stattdessen gilt:

Voraussetzung:
Die Funktionen f und g sind in einem Intervall I differenzierbar

Behauptung:

$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$ **Produktregel**

Beweis:
Sei $F(x) = f(x)\cdot g(x)$. Die erste Ableitung von F ist als Grenzwert der Sekantensteigungen (des Differenzialquotienten) definiert:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}$$

Es wird nun ein geeigneter Term eingeschoben, nämlich $-f(x_0)\cdot g(x_0+h)+f(x_0)\cdot g(x_0+h)$

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0+h)+f(x_0)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}$$

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0+h)+f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)$$

$$F'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

Bem.:
- Die Grenzwerte dürfen summanden- bzw. faktorenweise gebildet werden
- Da die Funktion g differenzierbar ist, ist sie auch stetig

B: $(x \cdot \ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

B: $\left(e^{2x}\right)' = \left(e^x \cdot e^x\right)' = e^x \cdot e^x + e^x \cdot e^x = 2e^{2x}$ Beachte den Faktor 2 ($\rightarrow$ Kettenregel)

B: Kombination mit der Konstantenregel

$(\sin(2x))' = (2\sin x \cos x)' = 2 \cdot (\sin x \cos x)' = 2 \cdot (\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x) =$
$2 \cdot \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 2 \cdot \cos(2x)$

B: $\left(\sin^2 x\right)' = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ ($\rightarrow$ Kettenregel!)

Man wird nicht jedes Produkt mit der Produktregel ableiten:

B $\left((2x-1) \cdot \left(x^2 - 2\right)\right)' = \left(2x^3 - x^2 - 4x + 2\right)' = 6x^2 - 2x - 4$ ausmultiplizieren

Verallgemeinerung der Produktregel auf mehrere Faktoren

$(f \cdot g \cdot h)' = ((f \cdot g) \cdot h)' = (f' \cdot g + f \cdot g') \cdot h + (f \cdot g) \cdot h'$

$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$ jeder Faktor wird genau einmal abgeleitet.

Der Spezialfall f = g = h führt auf

$\left(f^3\right)' = 3 \cdot f^2 \cdot f'$

und durch induktives Schliessen auf die verallgemeinerte Potenzregel:

$\left(f^n\right)' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$ n $\in$ N

B: $\left((3x-1)^{10}\right)' = 10 \cdot (3x-1)^9 \cdot 3$

B $\left(\cos^4 x\right)' = -4 \cdot \cos^3 x \cdot \sin x$

Übungsaufgaben:

$\left((x-3) \cdot \sqrt{x}\right)' = \frac{3}{2} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}}$

$\left(\ln^2 x\right)' = \frac{2\ln x}{x}$

$\left(x^2 \cdot (\ln x - 1)\right)' = x \cdot (2\ln x - 1)$

$\left(x \cdot e^x\right)' = (x+1) \cdot e^x$ höhere Ableitungen $f^{(n)}(x) = (x+n) \cdot e^x$

$\left(x^2 e^x\right)' = \left(x^2 + 2x\right) \cdot e^x$ höhere Ableitungen $f^{(n)}(x) = \left(x^2 + 2nx + n \cdot (n-1)\right) \cdot e^x$

$(\sin x \cdot (1 + \cos x))' = 2\cos^2 x + \cos x - 1$ ($\cos^2$ x)' = - sin (2x)

$\left(\cos^2 x\right)' = -\sin(2x)$

$\left(e^x \cdot \sin x\right)' = e^x(\sin x + \cos x)$

Bad jokes:

$\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)' = (1)' = 0$ $\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)'$ = (1)' = 0

$(\tan x \cdot \cot x)' = (1)' = 0$ $(\cos x \cdot \tan x)' = (\sin x)' = \cos x$