

6. Weitere Ableitungsregeln

Die Ableitung einer Summe ist gleich der Summe der Ableitungen. Gilt eine entsprechende Vertauschungsaussage auch für das Produkt?

Test an einem Beispiel:

$$\left(x \cdot (x^2 + 1)\right)' = (x^3 + x)' = 3x^2 + 1 \neq 1 \cdot 2x \quad \text{Die Ableitung eines Produkts ist **nicht** gleich dem Produkt der Ableitungen}$$

Stattdessen gilt:

Satz:	
Voraussetzung:	Die Funktionen f und g sind in einem Intervall I differenzierbar
Behauptung:	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ Produktregel

Beweis:

Sei $F(x) = f(x) \cdot g(x)$. Die erste Ableitung von F ist als Grenzwert der Sekantensteigungen (des Differenzialquotienten) definiert:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h}$$

Es wird nun ein geeigneter Term eingeschoben, nämlich $-f(x_0) \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot g(x_0 + h)$

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h}$$

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \right)$$

$$F'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

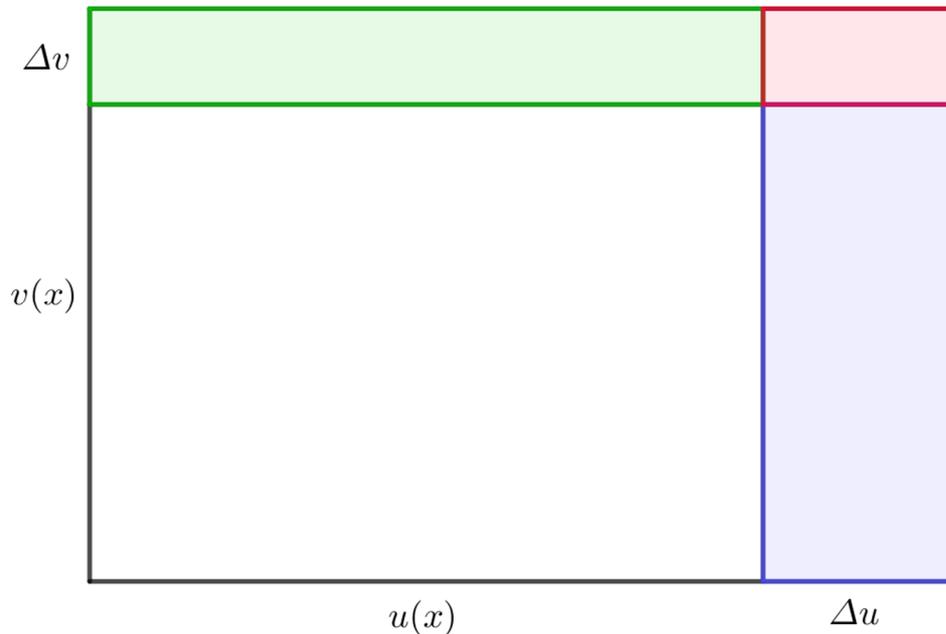
Bem.:

- Die Grenzwerte dürfen summanden- bzw. faktorenweise gebildet werden.
- Da die Funktion g differenzierbar ist, ist sie auch stetig.

Beweisvariante (die Notation wurde verändert)

Das Produkt der Faktoren $u(x)$ und $v(x)$ kann als Flächeninhalt $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ eines Rechtecks dargestellt werden.

Wird x um dx verändert, so verändert sich die Breite um Δu und Δv . Der Flächenzuwachs (gefärbte Rechtecke) beträgt $\Delta f = u(x) \cdot \Delta v + v(x) \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$



Für den Differenzenquotient gilt damit:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x) \cdot \Delta v + v(x) \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v$$

Wegen

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$$

Folgt daraus die Produktregel.

Beispiele:

1.

$$(x \cdot \ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

2.

$$(e^{2x})' = (e^x \cdot e^x)' = e^x \cdot e^x + e^x \cdot e^x = 2e^{2x}$$

Hinweis auf die \rightarrow Kettenregel

3.

Kombination mit der Konstantenregel

$$\begin{aligned} (\sin(2x))' &= (2 \sin x \cos x)' = 2 \cdot (\sin x \cos x)' = 2 \cdot (\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x) = \\ &= 2 \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cdot \cos(2x) \end{aligned}$$

4.

$$(\sin^2 x)' = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \quad \rightarrow \text{Kettenregel}$$

5.

Man wird nicht jedes Produkt mit der Produktregel ableiten:

$$((2x-1) \cdot (x^2-2))' = (2x^3 - x^2 - 4x + 2)' = 6x^2 - 2x - 4 \quad \text{ausmultiplizieren}$$

6.

Verallgemeinerung der Produktregel auf mehrere Faktoren

$$(f \cdot g \cdot h)' = ((f \cdot g) \cdot h)' = (f' \cdot g + f \cdot g') \cdot h + (f \cdot g) \cdot h'$$

$$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$$

Jeder Faktor wird also genau einmal abgeleitet.

Der Spezialfall $f = g = h$ führt auf

$$(f^3)' = 3 \cdot f^2 \cdot f'$$

und durch induktives Schliessen auf die verallgemeinerte Potenzregel:

$$(f^n)' = n \cdot f^{n-1} \cdot f' \quad n \in \mathbb{N} \quad \rightarrow \text{Kettenregel}$$

7.

$$((3x-1)^{10})' = 10 \cdot (3x-1)^9 \cdot 3$$

8.

$$(\cos^4 x)' = -4 \cdot \cos^3 x \cdot \sin x$$

Übungsaufgaben:

a)

$$\left((x-3) \cdot \sqrt{x}\right)' = \frac{3}{2} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

b)

$$\left(\ln^2 x\right)' = \frac{2 \ln x}{x}$$

c)

$$\left(x^2 \cdot (\ln x - 1)\right)' = x \cdot (2 \ln x - 1)$$

d)

$$\left(x \cdot e^x\right)' = (x+1) \cdot e^x$$

höhere Ableitungen $f^{(n)}(x) = (x+n) \cdot e^x$

e)

$$\left(x^2 e^x\right)' = (x^2 + 2x) \cdot e^x$$

höhere Ableitungen $f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n \cdot (n-1)) \cdot e^x$

f)

$$\left(\sin x \cdot (1 + \cos x)\right)' = 2 \cos^2 x + \cos x - 1 \quad (\cos^2 x)' = -\sin(2x)$$

g)

$$\left(\cos^2 x\right)' = -\sin(2x)$$

h)

$$\left(e^x \cdot \sin x\right)' = e^x (\sin x + \cos x)$$

i)

Bad jokes:

$$\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)' = (1)' = 0 \quad \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)' = (1)' = 0$$

$$\left(\tan x \cdot \cot x\right)' = (1)' = 0$$

$$\left(\cos x \cdot \tan x\right)' = (\sin x)' = \cos x$$