

## Quotientenregel

Die Ableitung eines Kehrwerts ist *nicht* gleich dem Kehrwert der Ableitung:  
Hingegen gilt:

Satz Spezialfall der Quotientenregel:

Voraussetzung:  $g$  differenzierbar und  $g(x) \neq 0$  in  $I$

Behauptung 
$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

Bemerkung:

Das Ergebnis ergibt sich auch aus der verallgemeinerten Potenzregel für  $n = -1$ .

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} = -\frac{1}{g(x_0)} \cdot \frac{1}{g(x_0+h)} \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\ \left(\frac{1}{g}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{g(x_0)} \cdot \frac{1}{g(x_0+h)} \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right) = -\frac{1}{g(x_0)} \cdot \frac{1}{g(x_0)} \cdot g'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \quad \square \end{aligned}$$

Beispiele:

1.

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

2.

$$(e^{-x})' = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = -\frac{e^x}{(e^x)^2} = -e^{-x} \quad \rightarrow \text{Kettenregel}$$

Der allgemeine Fall wird auf den Spezialfall und die Produktregel zurückgeführt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \frac{(-g')}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Satz:

Voraussetzung:  $f, g$  differenzierbar und  $g \neq 0$  in  $I$

Behauptung 
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{Quotientenregel}$$

Beispiele:

1.

$$\left(\frac{x^2 - 3x}{x+1}\right)' = \frac{(2x-3) \cdot (x+1) - (x^2 - 3x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

2.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

3.

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

4.

$$(x^2 \cdot e^{-x})' = \left(\frac{x^2}{e^x}\right)' = \frac{2x - x^2}{e^x} = (2x - x^2) \cdot e^{-x}$$

5.

$$\left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)' = \frac{1}{1 + \cos x} \qquad \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)' = -\frac{1}{1 + \sin x}$$

Nicht jeder Quotient muss mit der Quotientenregel abgeleitet werden:

6.

$$\left(\frac{x^3 - 8}{x}\right)' = \left(x^2 - \frac{8}{x}\right)' = (x^2 - 8x^{-1})' = 2x + 8x^{-2}$$

Für Fiesiker:

$$\left(\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}\right)' = \left(\frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x}\right)' = (1 - \cos x)' = \sin x$$

## Übungsaufgaben

a)

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

höhere Ableitungen:  $(-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$

b)

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

höhere Ableitungen:  $(-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!} \cdot x^{-\frac{2n+1}{2}}$

c)

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

d)

$$\left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}\right)' = \frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2}$$

e)

$$\left(\frac{x^2 - x - 2}{x - 3}\right)' = \frac{(x - 1)(x - 5)}{(x - 3)^2}$$

f)

$$\left(\frac{x^2 + 3}{x + 1}\right)' = \frac{(x + 3)(x - 1)}{(x + 1)^2}$$

g)

$$\left(\frac{2x}{9 + x^2}\right)' = \frac{2 \cdot (9 - x^2)}{(9 + x^2)^2} = 0$$

Lösung:  $x = \pm 3$

Mit falscher Umformung zur richtigen Lösung

$$\left(\frac{2x}{9 + x^2}\right)' \neq \left(\frac{2}{9} \cdot x + \frac{2}{x}\right)' = \frac{2}{9} - \frac{2}{x^2} = 0$$

Lösung :  $x = \pm 3$