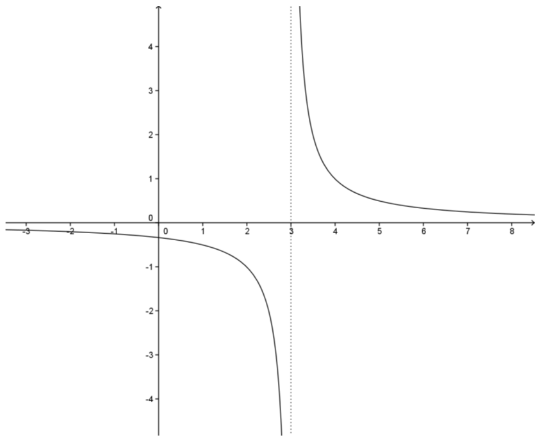
B2:

$$F(x)=\frac{1}{x-3} \quad x\neq 3$$

Der Graph der Funktion entsteht aus dem von B1 durch Translation um 3 Einheiten in positiver x-Richtung. Die Polstelle kommt dadurch an die Stelle x = 3 zu liegen.



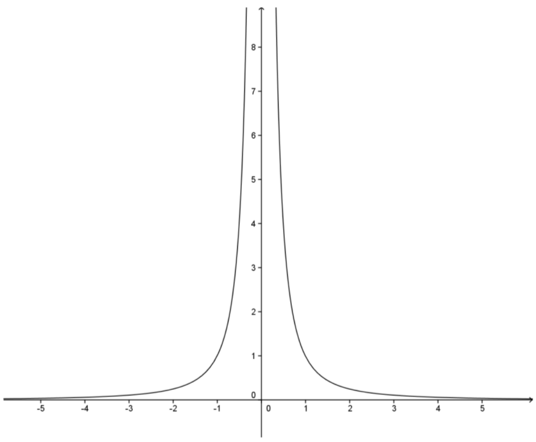
B3:

$$F(x)=\frac{2x-5}{x-3}=\frac{1}{x-3}+2 \quad x\neq 3$$

Der Graph der Funktion entsteht aus dem von B2 durch Translation um um 2 Einheiten in
y- Richtung
Horizontale Asymptote mit der Gleichung y = 2 (Parallele zur x-Achse).

B4:

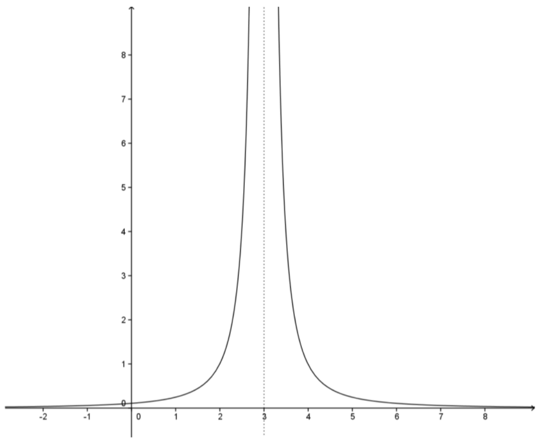
$$F(x)=\frac{1}{x^2} \quad x\neq 0$$



Pol der Stelle x = 0 ohne VZW.
Vertikale Asymptote an der Polstelle.
Die x-Achse ist horizontale Asymptote

B5:

$$F(x)=\frac{1}{(x-3)^2} \quad x\neq 3$$



Pol an der Stelle x = 3 ohne VZW.
Vertikale Asymptote an der Polstelle.
Die x-Achse ist horizontale Asymptote

B6:

$$F(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$$

F stimmt mit Ausnahme der Definitionslücke -1 mit $\mathrm{g(x)=x-1}$ überein. In diesem Fall ist also die Definitionslücke keine Polstelle. Man sagt, die Funktion F ist nach x = -1 stetig fortsetzbar.

Definition:
Eine Definitionslücke x_0 einer Funktion F heisst Polstelle von F, wenn in einer Umgebung von x_0 die Beträge der Funktionswerte über alle Grenzen wachsen.

Bem.
Der Graph der Funktion F kommt der Geraden x = x_0 beliebig nahe. Diese Gerade heisst vertikale Asymptote des Graphen.

Satz:
Die Polstellen einer gebrochenrationalen Funktion $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (f, g Polynome) sind bei den Nullstellen des Nenners zu suchen, die nicht zugleich Nullstellen des Zählers sind:
Es gilt also die folgende hinreichende Bedingung:

Ist $g(x_0) = 0$ und $f(x_0) \neq 0$ dann ist x_0 Polstelle der Funktion F.

Bem.
Ist die Nennernullstelle von ungerader Ordnung, so wechselt F an der Stelle x_0 das Vorzeichen, bei gerader Ordnung nicht.

Formulierungsvariante:

Definition:
Eine Definitionslücke x_0 der Funktion F heisst Polstelle von F, wenn sich F in der folgenden Form darstellen lässt:

$F(x) = \frac{h(x)}{(x - x_0)^n}$ mit $h(x_0) \neq 0$

Bem.
Ist n gerade, dann wechselt F an der Polstelle das Vorzeichen, für ungerade n nicht.

Entsprechend gilt für die Nullstellen einer gebrochenrationalen Funktion:

Satz:
Die Nullstellen einer gebrochenrationalen Funktion $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (f,g Polynome) sind bei den Nullstellen des Zählers zu suchen, die nicht zugleich Nullstellen des Nenners sind:
Es gilt also die folgende hinreichende Bedingung:

Ist $f(x_0) = 0$ und $g(x_0) \neq 0$ dann ist x_0 Nullstelle der Funktion F.

B: $F(x) = \frac{x}{x+1}$ Nullstelle mit VZW an der Stelle x = 0, Polstelle mit VZW an der Stelle x = -1

B: $F(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ Nullstelle mit VZW an der Stelle x = 0, Polstelle ohne VZW an der Stelle x = -1

B: $F(x) = \frac{x^3}{(x^2-1)\cdot(x+2)^4}$ Nullstelle 3. Ordnung an der Stelle x = 0 mit VZW

Polstelle bei x = 1 bzw x = -1 von 1. Ordnung mit VZW,
Polstelle bei x = -2 von 4. Ordnung ohne VZW.