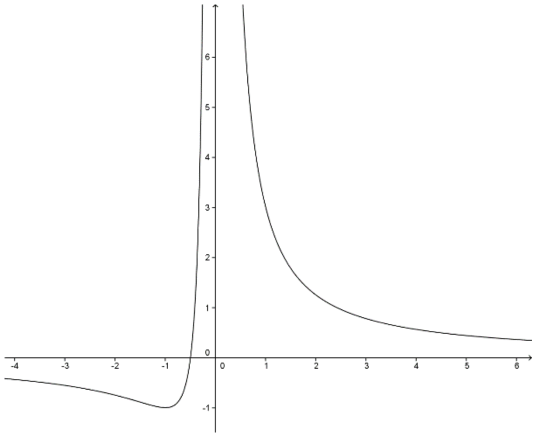
2. Asymptotisches Verhalten

Je nach Grad des Zählerpolynoms bzw. des Nennerpolynoms ändert sich das Verhalten einer gebrochenrationalen Funktion F für betragsgrosse x.
Sei n der Grad des Zählerpolynoms, m der des Nennerpolynoms

1. Fall: n < m   Der Zählergrad ist kleiner als der Nennergrad

B:
$$F(x)=\frac{2x+1}{x^2}$$



1. Nullstelle: $x = -\frac{1}{2}$ mit VZW

2. Polstelle: x = 0 ohne VZW

3. Asymptotisches Verhalten:
Dividiere Zähler-und Nennerpolynom durch die höchste Potenz von x
$$F(x)=\frac{2x+1}{x^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$$
Für betragsgrosse x kommen die Funktionswerte der Zahl 0 beliebig nahe d.h. es gilt: $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=0$

Die x-Achse ist Asymptote

4. Extrema:
Die 1. Ableitung kann mit der Potenzregel oder der Quotientenregel berechnet werden:
Mit der Potenzregel:
$$F'(x)=\left(\frac{2x+1}{x^2}\right)'=\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)'=\left(2x^{-1}+x^{-2}\right)'=-2x^{-2}-2x^{-3}=-2\cdot\frac{(x+1)}{x^3}$$
Mit der Quotientenregel:
$$F'(x)=\frac{-2x^2-2x}{x^4}=-2\cdot\frac{(x+1)}{x^3}$$ gemeinsame Faktoren im Zähler und Nenner kürzen!

Der Graph hat an der Stelle -1 einen Tiefpunkt T(-1,-1), denn die 1. Ableitung wechselt das Vorzeichen von - nach +.

5.Wendepunkte:
$$F''(x)=\frac{2(2x+3)}{x^4}=0$$ Der Graph hat an der Stelle $-\frac{3}{2}$ einen Wendepunkt $W\left(-\frac{3}{2},-\frac{8}{9}\right)$

die 2. Ableitung wechselt das Vorzeichen.

6. Graph:
Der Graph entsteht aus den Graphen der beiden Teilfunktionen $f(x)=\frac{4}{x}$ und $g(x)=\frac{2}{x^2}$ durch Superposition.

Allgemein gilt:

Satz:
Ist der Zählergrad kleiner als der Nennergrad, dann ist die x-Achse Asymptote des Graphen.

Uebungsaufgabe:

$$F(x) = \frac{4x}{x^2+4}$$

Beispielfür eine gebrochenrationale Funktion in der Physik:

Zustandsgleichung realer Gase (Van der Waalsgleichung) (WBZ-Kurs 94.04.01)

Betrachtet man anstatt der Zustandsgleichung idealer Gase $pV = nRT$ das angepasste Modell $\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right) \cdot (v - nb) = nRT$ mit den Korrekturtermen $\frac{an^2}{b}$ (Binnendruck) und nb (Kovolumen), so erhält man für n = 1 (n Anzahl Mole) die folgende gebrochenrationale Funktion für die Isothermen (T = const.):

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$ R: Universelle Gaskonstante

B. CO_2:
a = 0.362 Nm^4, b = $4.3 \cdot 10^{-5}$ m3, T = 0°C = 273.15K
$0 \le V \le 6 \cdot 10^{-4} m^3, \quad 0 \le p \le 10^7 \ N/m^2$

Die gestrichelte Kurve ist diejenige des idealen Gases mit $pV = RT$

Für die Koordinaten des Punktes H erhält man übrigens:
V = 0.0001912 und p = $5.42152 \cdot 10^6$