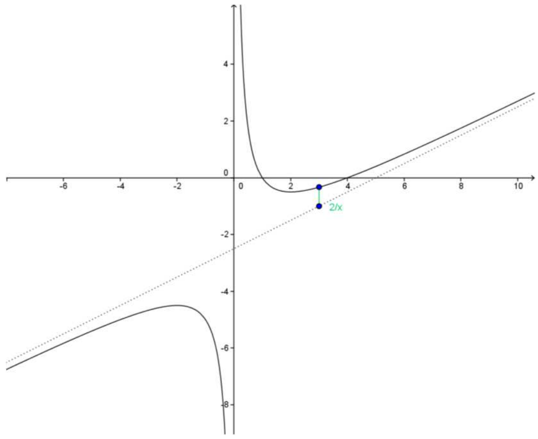
3. Fall: n = m + 1 Der Zählergrad ist um 1 grösser als der Nennergrad

$$F(x)=\frac{x^2-5x+4}{2x} \qquad x \neq 0$$



1. Nullstellen:
   $x^2-5x+4=(x-1)\cdot(x-4)=0$

   Nullstellen 1. Ordnung
   bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ mit VZW

2. Polstellen 1. Ordnung bei x = 0 mit VZW

3. Asymptotisches Verhalten:
   Dividiere das Zählerpolynom durch das Nennerpolynom:
   $$\frac{x^2-5x+4}{2x}=\tfrac{1}{2}x-\tfrac{5}{2}+\frac{2}{x}$$
   Für betragsgrosse x verhält sich F(x) wie die lineare Ersatzfunktion $g(x)=\tfrac{1}{2}x+\tfrac{5}{2}$ d.h. es gilt:
   $$\lim_{|x|\to\infty}\left(F(x)-\left(\tfrac{1}{2}x-\tfrac{5}{2}\right)\right)=\lim_{|x|\to\infty}\frac{2}{x}=0$$
   d.h. der Graph hat eine sogenannte schiefe Asymptote mit der Gleichung $y=\tfrac{1}{2}x-\tfrac{5}{2}$
4. Extrema
   $$F'(x)=\left(\frac{x^2-5x+4}{2x}\right)'=\frac{x^2-4}{2x^2}=0$$
   Tiefpunkt $T\left(2,-\tfrac{1}{2}\right)$ Vorzeichenwechsel von F‘ von – nach +
   Hochpunkt $H\left(-2,-\tfrac{9}{2}\right)$ Vorzeichenwechsel von F’ von + nach -

5. Stellt man die in der folgenden Form dar
   $$F(x)=\frac{x^2-5x+4}{2x}=\frac{x^2+4}{2x}-\frac{5}{2}$$ dann ist die Zentralsymmetrie des Graphen bezüglich des Schnittpunkts $S\left(0,-\tfrac{5}{2}\right)$ der beiden Asymptoten zu erkennen.

Uebungsaufgabe:
$$F(x)=\frac{(x-2)^2}{2x}$$

Allgemein gilt
Satz:
Ist der Grad des Zählerpolynoms um 1 grösser als der Grad des Nennerpolynoms, dann hat der Graph von F eine schiefe Asymptote.

Andere Möglichkeiten, die Gleichung der schiefen Asymptoten zu bestimmen, demonstriert am Beispiel:

$$\mathrm{F(x)} = \frac{\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x}}{\mathrm{x}+1} \qquad \mathrm{x} \neq -1$$

1.
Dividiert man den Zähler durch den Nenner, so erhält mein einen linearen Term ax + b und einen Rest r d.h. es gilt:
$x^2 - 3x = (x+1)\cdot(ax+b) + r = ax^2 + (b+a)\cdot x + (b+r)$
Koeffizientenvergleich ergibt a = 1, b = - 4 und r = 4 und damit die gewünschte Darstellung (1)

2. Mit dem Hornerschema

1	-3	0	
	-1	4	x = -1
1	-4	4	$F(x) = \dfrac{x^2-3x}{x+1} = x - 4 + \dfrac{4}{x+1}$ (1)

Gleichung der schiefen Asymptoten y = x - 4

3.
$$m = \lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{x-3}{x+1} = 1$$
$$q = \lim_{|x|\to\infty} \frac{x^2-3x}{x+1} - x = \lim_{|x|\to\infty}\left(-\frac{4x}{x+1}\right) = -4$$
4.
Erweitern nach der 3. binomischen Formel:
$$F(x) = \frac{x^2-3x}{x+1} = \frac{(x-3)\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{x-4+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$$
ergibt die richtige Gleichung der schiefen Asymptoten y = x - 4

Uebungsaufgaben:
Bestimme die Gleichung der schiefen Asymptoten des Graphen von

a) $F(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x-3}$ b) $F(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{2x-4}$

Lösung:
a) $y = x + 2$ b) $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$