

Aufgabe:

Bei welcher Füllmenge einer Mineralwasserdose liegt der Schwerpunkt am tiefsten?

Der Schwerpunkt S_D der leeren Dose mit der Masse m_D liegt genau in der Mitte des grossen Rechtecks bei $\frac{1}{2}$ (Einheit: Dosenhöhe). Ist die Dose bis zur Höhe x mit Mineralwasser gefüllt, so liegt der Schwerpunkt S_M des Mineralwassers mit der Masse m_M in der halben Höhe $\frac{1}{2}x$.

Der gemeinsame Schwerpunkt S des Systems liegt auf der Verbindungsgeraden der beiden Schwerpunkte (näher bei der schwereren Masse) und teilt die Strecke im Verhältnis der beiden Massen d.h. es gilt:

$$\frac{s_1}{s_1 + s_2} = \frac{m_D}{m_B + m_D} \quad (1)$$

Annahme: $m_D = 25$ g, $m_M = 500 \cdot x$ g

$s_1 + s_2$ ist gerade gleich der Differenz zwischen den beiden

Schwerpunkten S_D und S_M : $\frac{1}{2} \cdot (1 - x)$

Damit gilt nach (1)

$$\frac{s_1}{\frac{1}{2} \cdot (1 - x)} = \frac{25}{500x + 25} \quad \text{oder nach } s_1 \text{ aufgelöst } s_1 = \frac{25}{500x + 25} \cdot \frac{1 - x}{2} = \frac{1 - x}{40x + 2}$$

Addiert man zu s_1 noch $\frac{1}{2}x$, so erhält man für die Höhe des Gesamtschwerpunkts:

$$s(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 - x}{40x + 2} = \frac{20x^2 + 1}{40x + 2} \quad (2)$$

$$s'(x) = 10 \cdot \frac{20x^2 + 2x - 1}{(20x + 1)^2} = 0$$

$$20x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{20} \cdot (-1 \pm \sqrt{21}) \quad (3)$$

$$x_1 \approx 0.179 \quad x_2 < 0$$

Lösung:

Bei einer Füllhöhe von ca. 18% liegt der Schwerpunkt am tiefsten.

Bemrkung:

Es fällt auf, dass in diesem Fall der Schwerpunkt mit dem Mineralwasserspiegel übereinstimmt, denn die Gleichung $s(x) = x$ hat dieselben Lösungen (3) (?).

