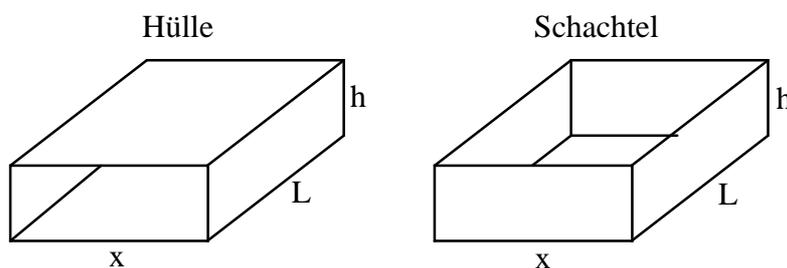


Aufgabe

Eine Zündholzschachtel besteht aus zwei Teilen: der "Hülle" und der eigentlichen Schachtel.



Die Schachtel bietet Platz für 50 Zündhölzer. Damit sind die Länge L und das Volumen V vorgegeben: $L = 58 \text{ mm}$ $V = 32'480 \text{ mm}^3$. Gesucht ist also die Breite x , für die die Materialfläche A minimal wird.

Welche Form muss die Schachtel haben, damit für die Herstellung

a) der Hülle A_H

b) der Hülle A_H und der Schachtel A_S möglichst wenig Material gebraucht wird?

Bem.:

Für die Hülle und die Schachtel können dieselben Längen L , h und x verwendet werden.

a)

1. Zielfunktion:

Fläche der Hülle:

$$A_H = 3Lh + 2Lx$$

2. Nebenbedingung:

vorgegebenes Volumen:

$$V = Lxh \quad h = \frac{V}{Lx}$$

3. Zielfunktion:

$$A_H(x) = \frac{3V}{x} + 2Lx$$

$$4. A'_H(x) = -\frac{3V}{x^2} + 2L = 0 \quad x^2 = \frac{3V}{2L} \quad x_1 = \sqrt{\frac{3V}{2L}} \quad x_2 = -x_1 < 0 \text{ ist keine Lösung}$$

Ergebnis:

Der Materialverbrauch für die Hülle der Zündholzschachtel wird minimal für die Breite

$x \approx 29.0 \text{ mm}$. Die Höhe ist dann $h \approx 19.3 \text{ mm}$ und der Flächeninhalt der Hülle

$$A_H = 6724 \text{ mm}^2.$$

b) (aufwändiger)

1. Zielfunktion:

Fläche der Hülle: $A_H = 3Lh + 2Lx$

Fläche der Schachtel: $A_S = (x + 2h) \cdot (L + 3h) = Lx + 3xh + 2Lh + 6h^2$

Gesamtverbrauch $A = 3Lx + 3xh + 5Lh + 6h^2$

2. Nebenbedingung: $h = \frac{V}{Lx}$

3. Zielfunktion: $A(x) = 3Lx + \frac{3V}{L} + \frac{5V}{x} + \left(\frac{V}{L}\right)^2 \cdot \frac{1}{x^2}$

L und V eingesetzt $A(x) = 174x + 1680 + \frac{162400}{x} + \frac{1881600}{x^2}$

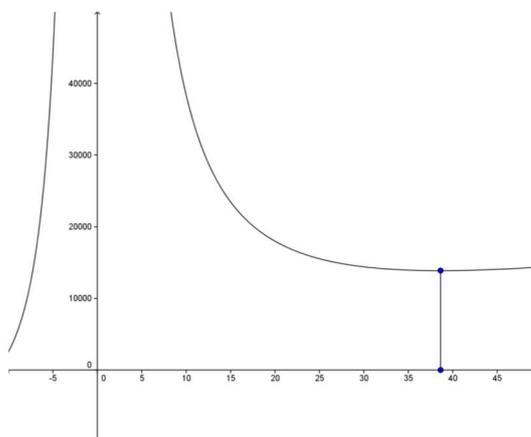
4. Bestimmung des Minimums

$$A'(x) = 174 - \frac{162400}{x^2} - \frac{3763200}{x^3} = 0$$

mit x^3 multipliziert

$$174x^3 - 162400x - 3763200 = 0$$

Ein numerisches Verfahren ergibt die Lösung $x \approx 38.64$.



Ergebnis:

Der Materialverbrauch für Hülle und Schachtel wird für $x \approx 38.6$ mm minimal. Die zugehörige Höhe ist dann $h \approx 14.5$ mm.