13. Weitere Integrationsverfahren

Gemäss dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung ist die Berechnung von bestimmten Integralen einfach, sofern eine Stammfunktion vorliegt. Bei der Suche nach Stammfunktionen sind die folgenden Verfahren nützlich:

• Partielle Integration	als Gegenstück zur Produktregel der Differentialrechnung
• Substitutionsregel	als Gegenstück zur Kettenregel der Differentialrechnung
• Partialbruchzerlegung	Integration von gebrochen rationalen Funktionen

Partielle Integration

Nach Definition des unbestimmten Integrals gilt:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \Leftrightarrow \big(F(x)+c\big)' = f(x)$$

d.h. F(x)+c ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

Die Produktregel der Differentialrechnung $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$ kann damit in der Integralsprache auch folgendermassen formuliert werden:

Voraussetzung:
f, g sind stetig differenzierbar in einem Intervall I
fg ist eine Stammfunktion von $(f'\cdot g + f\cdot g')$ bzw.

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx + \int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) + c \qquad \text{und damit}$$

$$\boxed{\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx \qquad \textbf{Partielle Integration}}$$

Idee:
Der Integrand wird so in ein Produkt $f'g$ zerlegt dass sich zu fg' eine Stammfunktion angeben lässt. Mit f ' wird der Faktor bezeichnet, der sich leicht integrieren lässt. Der mit g bezeichnete Faktor soll beim Ableiten nicht wesentlich komplizierter werden.

Beispiele:

Integranden der Form $x^n\cdot\sin x$, $x^n\cdot\cos x$, $x^n\cdot e^x$, $x^n\cdot\ln x$

$$\int x\cdot\sin x\,dx = -x\cos x + \int\cos x\,dx = -x\cdot\cos x + \sin x + c$$

$$f'(x) = \sin x \qquad f(x) = -\cos x$$
$$g(x) = x \qquad g(x) = 1$$

$$\int x^n \cdot \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln x - \frac{1}{n+1} \cdot \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + c$$

$f'(x) = x^n$ $\quad f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\quad n \neq -1$ $\quad$ x > 0

$g(x) = \ln x$ $\quad g'(x) = \frac{1}{x}$

speziell gilt für n = 0:

$\int \ln x\, dx = x \cdot (\ln x - 1) + c$ (1)

$\int (\ln x)^2\, dx = x \cdot (\ln x)^2 - 2x \cdot (\ln x - 1) + c$

Man wählt $f'(x) = 1$ $g(x) = (ln\, x)^2$ und verwendet (1)

zweimalige partielle Integration:

$$\int e^x \cdot \sin x\, dx$$

$f'(x) = \sin x$ $\quad f(x) = -\cos x$

$g(x) = e^x$ $\quad g'(x) = e^x$

$$\int e^x \cdot \sin x\, dx = -e^x \cdot \cos x - \int -e^x \cdot \cos x\, dx$$

$$= -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x\, dx$$

$f'(x) = \cos x$ $\quad f(x) = \sin x$

$g(x) = e^x$ $\quad g'(x) = e^x$

$$= -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x\, dx$$

$$2 \int e^x \cdot \sin x\, dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x = e^x \cdot (\sin x - \cos x)$$

und damit

$$\int e^x \cdot \sin x\, dx = \frac{1}{2} \cdot e^x \cdot (\sin x - \cos x)$$

Beispiele für Rekursionsformeln

$E_n = \int x^n \cdot e^x dx = x^n \cdot e^x - n \cdot E_{n-1}$ führt wegen $E_0 = e^x + c$ auf

$E_1 = (x-1) \cdot e^x + c$ und $E_2 = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x + c$

Potenzen von sin x bzw. cos x

Bei Potenzen von $sin\ x$ bzw. $cos\ x$ wird $\sin^2 x + cos^2 x = 1$ verwendet:

$$S_2 = \int \sin^2 x\, dx = -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x\, dx = -\sin x \cdot \cos x + \int \left(1 - \sin^2 x\right) dx = x - \sin x \cos x - S_2$$

und daraus

$$S_2 = \tfrac{1}{2}\left(x - \sin x \cdot \cos x\right) + c$$

Mit dem gleichen Vorgehen erhält man für S_n die folgende Rekursionsformel:

$$S_n = -\tfrac{1}{n} \cdot \cos x \cdot \sin^{n-1} x + \tfrac{n-1}{n} \cdot S_{n-2}$$

Dazu wählt man

$f(x) = \sin^{n-1} x$ und $g'(x) = sin\ x$

$$S_n = \int \sin^n x\, dx = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + \int (n-1) \cdot \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x\, dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1) \cdot \int \sin^{n-2} x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right) dx = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1) \cdot \left(S_n - S_{n-2}\right)$$

Löst man nach S_n auf, so ergibt sich die Behauptung.

Diese Stammfunktionen führen für $n \geq 2$ auf die folgende Rekusionsformel für die bestimmten Integrale:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx$$

nämlich

$$I_n = \tfrac{n-1}{n} \cdot I_{n-2} \qquad n \geq 2$$

Aus den bekannten Startwerten $I_0 = \frac{\pi}{2}$ und $I_1 = 1$ erhält man mit dieser Rekursionsformel und den bekannten Werten für $I_0 = \frac{\pi}{2}$ und $I_1 = 1$ die folgenden Werte

$I_0 = \frac{\pi}{2}$	$I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$	$I_4 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2}$	$I_6 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi}{2}$
$I_1 = 1$	$I_3 = \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{2}{3}$	$I_5 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$	$I_7 = \frac{6}{7} \cdot I_5 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}$

Hinweis: Formel von J. Wallis (1616-1703)

Substitutionsregel

Einführendes Beispiel:
Nach der Kettenregel gilt:

$$(\sin(2x))' = \cos(2x)\cdot 2$$

oder als unbestimmtes Integral formuliert:

$$\int \cos(2x)\cdot 2\,dx = \sin(2x) + c$$

Der Integrand ist das Produkt einer zusammengesetzten Funktion $f(g(x))$ und der Ableitung der inneren Funktion $g'(x)$ mit $z = g(x) = 2x$ und $f(z) = cos\ z$, wobei $g'(x) = 2$.

Allgemein gilt:

Substitution 1. Art

Voraussetzung: g stetig differenzierbar im Intervall I, f stetig auf $g(I)$. Behauptung: $\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int f(z)dz$ mit $z = g(x)$ **Substitution 1. Art**

Wegen $g'(x) = \frac{dz}{dx}$ bzw. $dz = g'(x)\,dx$ gilt nach der Kettenregel der Differentialrechnung die folgende allgemeine Regel:

Damit ergibt sich folgendes Vorgehen, wenn der Integrand das Produkt einer zusammengesetzten Funktion und der Ableitung der inneren Funktion ist:

- g(x) wird durch z ersetzt und g'(x) dx durch dz
- Integration nach z
- z wird wieder durch g(x) ersetzt.

In vielen Fällen ist g eine lineare Funktion:

Substitution: $z = g(x) = ax + b \qquad g'(x) = a$

$$\int \cos(2\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \tfrac{1}{2}\int \cos(2\mathrm{x})\,2\,\mathrm{dx} = \tfrac{1}{2}\int \cos \mathrm{z}\,\mathrm{dz} = \tfrac{1}{2}\sin \mathrm{z} + \mathrm{c} = \tfrac{1}{2}\sin(2\mathrm{x}) + \mathrm{c}$$

$$\int (3x-2)^{12}dx = \tfrac{1}{39}\cdot(3x-2)^{13} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x}} = \int \frac{2}{2\sqrt{3+2x}}dx = \int \frac{dz}{2\sqrt{z}} = \sqrt{z} + c = \sqrt{3+2x} + c$$

$$\int x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\int e^{-\frac{x^2}{2}} (-x) dx = -\int e^z dz = -e^{-\frac{x^2}{2}} + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)\, dx = -\int \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = -\sqrt{1-x^2} + c$$

Bei ungeraden Potenzen des Sinus oder Cosinus führt folgender „dirty trick" zum Ziel:

$$\int \cos^3 x dx = \int \left(1-\sin^2 x\right) \cdot \cos x\, dx = \int \left(1-z^2\right) dz = z - \frac{z^3}{3} + c = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

Substitution: $z = g(x) = \sin x \qquad g'(x) = \cos x$

Steht im Zähler die Ableitung des Nenners, so spricht man von **logarithmischer Integration**

$$\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x \cdot dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \cdot ln(x^2+1) + c$$

Substitution: $z = g(x) = x^2 + 1 \qquad g'(x) = 2\text{x}\, x$

$$\int \frac{\text{x}}{\text{x}^2+1} \text{dx} = \frac{1}{2} \int \frac{2\text{x}}{\text{x}^2+1} \text{dx} = \frac{1}{2} \ln\left(\text{x}^2+1\right) + \text{c}$$

b)

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln\left|\sin x\right| + c$$

c)

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln\left|\ln x\right| + c$$

e)

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \ln\left(e^x + e^{-x}\right) + c$$

Allgemein gilt:

$$\int \frac{\text{g}'(\text{x})}{\text{g}(\text{x})} \text{dx} = \ln\left|\text{g}(\text{x})\right| + \text{c} \quad \text{wobei} \quad \text{g}(\text{x}) \neq 0$$

Logarithmische Integration

Substitution 2. Art

Eine Substitution kann auch durchgeführt werden, wenn die Ableitung der inneren Funktion nicht als Faktor des Integranden auftritt. Wir vertauschen dazu x und z und lesen die Regel von rechts nach links.

Voraussetzung:
g sei umkehrbar und $g'(z) \neq 0$

$\int f(x)dx = \int f(g(z)) \cdot g'(z)\, dz$ mit $x = g(z)$ bzw. $z = \bar{g}(x)$ **Substitution 2. Art**

Beispiele:

Der Integrand enthält eine n-te Wurzel aus einer linearen Funktion $\sqrt{a \cdot x + b}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-3}} dx \cdot$$

mit $z = \sqrt{2x-3}$ gilt: $z^2 = 2x - 3$ oder $x = \frac{1}{2} \cdot (z^2 + 3)$

Aus $\frac{dx}{dz} = z$ folgt $dx = z\,dz$ und damit

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-3}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{(z^2+3)}{z} \cdot z\, dz = \frac{1}{2}\int (z^2+3) dz = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} \cdot z^3 + 3z\right) + c$$
$$= \frac{1}{6}\sqrt{(2x-3)^3} + \frac{3}{2}\sqrt{(2x-3)} + c$$

Statt bei bestimmten Integralen die Substitution rückgängig zu machen, können auch die Grenzen transformiert werden.

$$\int_0^3 x \cdot \sqrt{3-x}\, dx = ?$$

Setze: $z = \sqrt{3-x}$ womit gilt: $z^2 = 3 - x$ oder $x = 3 - z^2$

Aus $\frac{dx}{dz} = -2z$ folgt $dx = -2z\, dz$

Der Grenze x = 0 entspricht die Grenze $z = \sqrt{3}$ und der Grenze x = 3 die Grenze $z = 0$

$$\int_0^3 x \cdot \sqrt{3-x}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^0 (3 - z^2)\, z \cdot (-2z)\, dz = 2\int_{\sqrt{3}}^0 (z^4 - 3z^2) dz = \left| 2\left(\frac{z^5}{5} - z^3\right)\right|_{\sqrt{3}}^0 = \frac{12}{5}\sqrt{3}$$

Enthält der Integrand trigonometrische Funktionen, so führt die Substitution $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ vermöge der Rationalisierungsformeln auf Integrale von gebrochen rationalen

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c$$

Die Substitution $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ führt auf $\frac{x}{2} = \arctan z$, also gilt:

$x = 2\arctan z$ und wegen $\frac{dx}{dz} = \frac{2}{1+z^2}$ schliesslich $dx = \frac{2}{1+z^2}\cdot dz$

Mit der Rationalisierungsformel

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$$

folgt

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1+z^2}{2z}\cdot\frac{2}{1+z^2}\,dz = \int \frac{dz}{z} = \ln z + c = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c$$

In den folgenden Beispielen werden Substitutionsregel und partielle Integration kombiniert:

$$\int \arcsin x\,dx = ?$$

Substitution

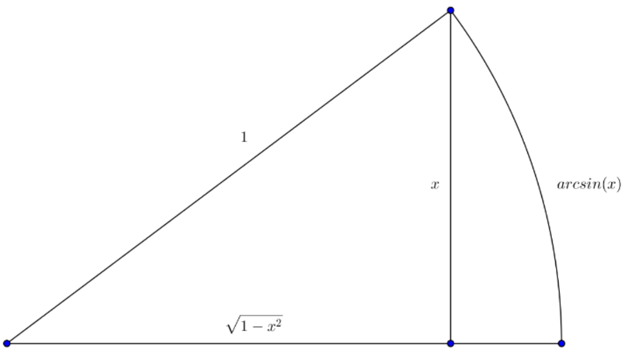
$z = \arcsin x \quad x = \sin z \quad dx = \cos z\,dz$

$$\int z\cos z\,dz = z\sin z + \cos z + c$$

mit partieller Integration

$$\int z\cos z\,dz = x\arcsin x + \cos(\arcsin x) + c$$

$$= x\cdot\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$



$$\int (\ln x)^2\,dx = ?$$

Substitution: $z = \ln x$ womit $x = e^z$

Aus $\frac{dx}{dz} = e^z$ folgt $dx = e^z\,dz$

und damit

$$\int (\ln x)^2\,dx = \int z^2 e^z\,dz = \left(z^2 - 2z + 2\right)\cdot e^z + c = x\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right) + c$$

Variante: zweimal partiell integrieren!

Partialbruchzerlegung

Jede gebrochen rationale Funktion kann als Summe einer ganzrationalen und einer echt gebrochen rationalen Funktion (der Zählergrad ist kleiner als der Nennergrad) dargestellt werden. Dazu dividiert man den Zähler durch den Nenner.

Beispiel:

$$\int \frac{x^3+1}{x-2}dx = \int\left(x^2+2x+4+\frac{9}{x-2}\right)dx = \frac{x^3}{3}+x^2+4x+9\ln|x-2|+c$$

1. Fall:
Die Nennerfunktion ist linear:
Die entstehenden Integrale können mit Substitution 1. Art gelöst werden:

$$\int \frac{b}{ex+f}dx = \frac{b}{e}\ln|ex+f|+c \qquad ex + f \neq 0$$

2. Fall:
Falls die Nennerfunktion nicht linear ist, ist eine sogenannte Partialbruchzerlegung durchzuführen.
Wir betrachten exemplarisch den Fall eines quadratischen Nennerpolynoms mit der Diskriminante D, d.h.

Integranden der Form $\dfrac{ax+b}{dx^2+ex+f}$

2a)
Hat die Nennerfunktion zwei verschiedene reelle Nullstellen x_1 und x_2 (D > 0), dann kann der Integrand als Summe zweier Teilbrüche mit den Nennern $(x-x_1)$ bzw. $(x-x_2)$ dargestellt werden.

Ansatz:

$$\frac{x+7}{x^2-x-2} = \frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+1} = \frac{x\cdot(a+b)+a-2b}{x^2-x-2}$$

Koeffizientenvergleich ergibt a = 3 und b = -2 und schliesslich

$$\int \frac{x+7}{x^2-x-2}dx = \ln\left|\frac{(x-2)^3}{(x+1)^2}\right|+c$$

Übungsaufgabe:

$$\int \frac{2\,dx}{x^2-6x+5} = ln\sqrt{\left|\frac{x-5}{x-1}\right|}+c$$

2b)
Hat die Nennerfunktion eine doppelte Nullstelle, dann ist die Partialbruchzerlegung analog zum folgenden Beispiel anzusetzen:

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1} = \frac{a+b\cdot(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{bx+(a+b)}{(x+1)^2}$$

Koeffizientenvergleich ergibt a = -1 und b = 1 und schliesslich

$$\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{x+1} + \ln|x+1| + c$$

2c)
Hat die Nennerfunktion keine reellen Nullstellen, dann ist der Integrand, wie das folgende Beispiel zeigt, als Summe zweier Teilbrüche darzustellen:

$$\frac{3x+2}{x^2-6x+10} = \frac{3}{2}\,\frac{2x-6}{x^2-6x+10} + \frac{11}{(x-3)^2+1}$$

Der erste Teilbruch führt auf logarithmische Integration (ein Term wird so abgespaltet, dass im Zähler die Ableitung des Nenners steht), der zweite führt auf einen Arcustangens als Stammfunktion:

$$\int \frac{3x+2}{x^2-6x+10}\,dx = \frac{3}{2}\ln\left(x^2-6x+10\right) + 11\arctan(x-3) + c$$

Zusammenfassung:

Ist eine gebrochen rationale Funktion zu integrieren, so gehe man in den folgenden Schritten vor:
1.
Ist der Zählergrad grösser als der Nennergrad, so dividiert man den Zähler durch den Nenner.
2.
Der Nenner wird in Linearfaktoren und in reell nicht zerlegbare quadratische Faktoren zerlegt. Für jeden Faktor im Nenner ist ein Teilbruch (Partialbruch) zu berücksichtigen:

x_1 einfache Nullstelle	$\frac{a_1}{x-x_1}$
x_2 mehrfache Nullstelle	$\frac{a_2}{x-x_2} + \frac{b_2}{(x-x_2)^2} + \frac{c_2}{(x-x_2)^3}$
keine reelle Nullstelle	$\frac{dx+e}{x^2+px+q}$

Beispiel:

$$\int \frac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4}\,dx = \int \frac{x+1}{(x-2)^2(x-1)}\,dx = \int \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}\,dx$$

$$= 2\ln|x-1| - 2\ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + c$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\cdot(1-x)^4}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \left(-\frac{4}{1+x^2} + x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4\right)dx = \frac{22}{7} - \pi \text{ (?!)}$$