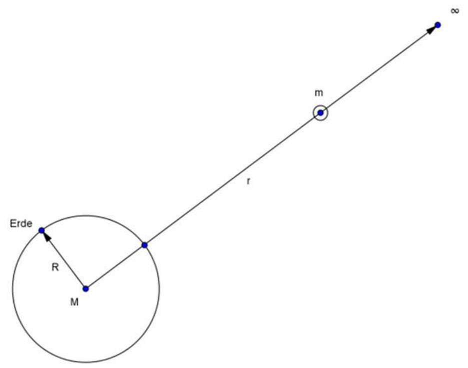
12. Anwendungen der Integralrechnung in der Physik

Aufgabe:
Berechne die Arbeit W, die im Gravitationsfeld der Erde aufgewendet werden muss, um einen Körper mit der Masse m gegen die Kraft F aus dem Abstand R in den Abstand r zu bringen.

Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz gilt:

$$F(r) = \gamma \cdot \frac{Mm}{r^2}$$



Für die erforderliche Arbeit W gilt dann:

$$W = \int_R^{r_1} \gamma \cdot \frac{Mm}{r^2} dr = \gamma Mm \cdot \int_R^{r_1} \frac{dr}{r^2} = \gamma Mm \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$$

Soll der Körper mit der Masse m ganz aus dem Feld entfernt werden. so führt dies auf das folgende uneigentliche Integral

$$W = \gamma Mm \cdot \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \gamma \cdot \frac{Mm}{R}$$

Um das Gravitationsfeld der Erde zu verlassen, muss die kinetische Energie eines Satelliten mindestens gleich gross sein:

$\frac{1}{2} mv^2 = \gamma \cdot \frac{Mm}{R}$ oder

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} \qquad (1)$$

Numerisches Beispiel:
Erdmasse M = $5.97 \cdot 10^{24}$ kg, Erdradius R = 6370 km,
Gravitationskonstante γ = $6.67259 \cdot 10^{-11}$ Nm^2kg^{-2}
Fluchtgeschwindigkeit: v $\approx$ 11 km/s

Da an der Erdoberfläche die auf den Körper ausgeübte Kraft gleich seinem Gewicht ist, gilt ausserdem:

$mg = \frac{\gamma m M}{R^2}$ oder $\gamma M = R^2 g$.

Setzt man diesen Wert in (1) ein, so ergibt sich für die Fluchtgeschwindigkeit (ohne Berücksichtigung der Lufthülle):

$$v = \sqrt{2gR}$$

Bem.:
Raketen erreichen ihre Höchstgeschwindigkeit nach dem beschleunigenden Abbrand des Treibsatzes erst in einer gewissen Höhe über der Erde. Daher ist wegen des geringeren Wertes der Fallbeschleunigung in dieser Höhe auch die Fluchtgeschwindigkeit geringer
(für h = 800 km etwa 10.5 km/s).

Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung

Bekanntlich ist die Momentangeschwindigkeit v: t $\rightarrow$ v(t) als erste Ableitung der Weg-Zeitfunktion definiert. Die Aussage $v = \dot{s}$ kann damit auch in der folgenden Form ausgedrückt werden:
Der zurückgelegte Weg ist eine Stammfunktion der Geschwindigkeit oder:
$s(t) = \int v(t)\,dt$.

Da entsprechend die Momentanbeschleunigung a: t $\rightarrow$ a(t) als erste Ableitung der Geschwindigkeit-Zeitfunktion definiert ist, kann die Aussage $a = \dot{v}$ auch in der folgenden Form ausgedrückt werden:
Die Geschwindigkeit ist eine Stammfunktion der Beschleunigung oder:
$v(t) = \int a(t)\,dt$

Aufgabe:
Zu r Zeit t = 0 wird ein Stein aus der Höhe h_0 über dem Erdboden mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen.
a) Zu welchem Zeitpunkt T kehrt der Stein um, welche Höhe erreicht er?
b) Nach welcher Zeit τ und mit welcher Geschwindigkeit schlägt er auf dem Erdboden auf?

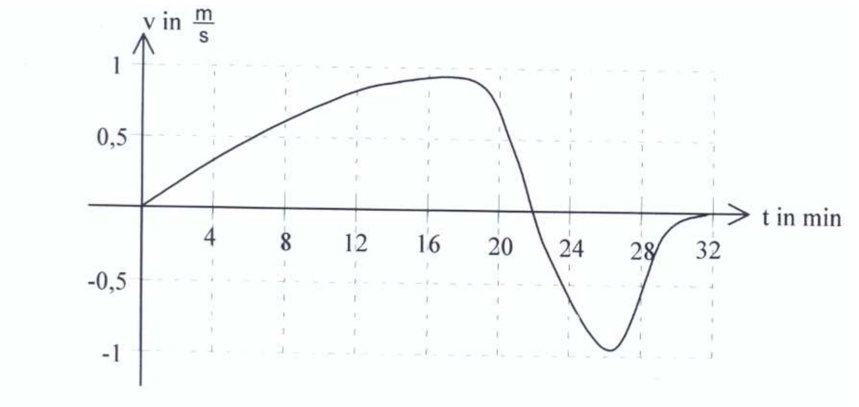
a)
Wegen a(t) = -g ist $v(t) = \int -g\,dt = -gt + c_1$
c_1 ist aus der Anfangsbedingung $c_1 = v(0) = v_0$ bestimmt.
Für die Geschwindigkeits-Zeitfunktion gilt damit:
$v(t) = -gt + v_0$. (1)
Die Weg-Zeit-Funktion gewinnt man durch erneute Integration:
$s(t) = \int (-gt + v_0)\,dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + c_2$.
c_2 ist durch die Anfangsbedingung $c_2 = s(0) = h_0$ bestimmt.
Gesuchte Weg-Zeitfunktion:
$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$ (2)
Da im Umkehrpunkt die Geschwindigkeit 0 ist folgt aus (1):
$gT = -v_0$ oder $T = \frac{v_0}{g}$ und mit (2) die gesuchte Höhe:
$$H = s(T) = -\frac{1}{2}g \cdot \frac{v_0^2}{g^2} + \frac{v_0^2}{g} + h_0 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} + h_0 .$$

b)
Da der Stein im Zeitpunkt τ den Erdboden erreicht ist $s(\tau) = 0$. Gesucht ist also wegen (2) die positive Lösung der quadratischen Gleichung
$-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0 = 0$. Dies ergibt:
$\tau = \dfrac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}$ und eingesetzt in (1) die Aufprallgeschwindigkeit
$v(\tau) = -\sqrt{v_0^2 + 2gh_0}$
Da der Stein im Fallen ist, ist die Geschwindigkeit negativ.

Numerisches Beispiel:

Für $h_0 = 10$ m und $v_0 = 5$ m/s ergeben sich mit $g \approx 10\text{m/s}^2$ die folgenden Werte:
T = 0.5 s, H = 11.25 m, τ = 2 s, $|v(2)| = 15 m/s$

Aufgabe Heissluftballon

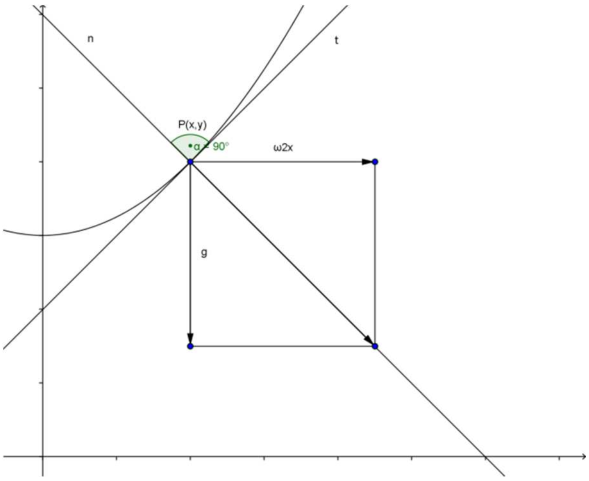


Die Abbildung zeigt die Vertikalgeschwindigkeit v (positiv bei der Aufwärtsbewegung) eines Heissluftballons als Funktion der Fahrzeit t. Der Ballon starte zur Zeit t = 0 in 300 m Höhe über NN.
Wie kann der Fahrverlauf beschrieben werden?

Der Ballon steigt während 22 Minuten, zunächst während ca. 18 Minuten mit wachsender, dann mit abnehmender Geschwindigkeit.
Anschliessend sinkt er bis zur Landung nach 32 Minuten, wobei die grösste Sinkgeschwindigkeit nach ca. 26 Minuten erreicht wird.
Nach 22 Minuten erreicht er die maximale Höhe. Diese kann ermittelt werden, indem der Inhalt der Fläche unter der Kurve angenähert ermittelt wird (diese ist wegen der unterschiedlichen Einheiten min bzw.s noch mit dem Faktor 60 zu multiplizieren).
Der Ballon steigt ungefähr 800 m auf 1100 m Höhe und sinkt anschliessend ungefähr 250m auf ungefähr 850 Meter, wo er landet.
Je nach Annäherung des Inhalts ergeben sich kleinere oder grössere Abweichungen vom Resultat.

Aufgabe: rotierender Zylinder mit Wasser (Idee: hb)

Ein mit Wasser gefülltes zylindrisches Gefäss rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Mit welcher Gleichung kann die Randkurve der Wasseroberfläche beschrieben werden?



Aus der Physik ist die Steigung der Normalen n bekannt:

$$m_n = -\frac{g}{\omega^2 x}$$

Damit ist auch die Steigung der Tangente t bekannt:

$$m_t = \frac{\omega^2 x}{g}$$

Gesucht ist also die Kurve mit der Gleichung y = f(x), welche im Punkt P(x,y) die Steigung m_t hat. Gesucht ist also die Funktion f mit der 1. Ableitung

$$m_t = f'(x) = \frac{\omega^2 x}{g} = \frac{\omega^2}{g} \cdot x$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich zu

$$f(x) = \int \frac{\omega^2}{g} \cdot x\,dx = \frac{\omega^2}{2g} \cdot x^2 + c$$

c ist abhängig vom Zylinderradius und dem Wasservolumen.