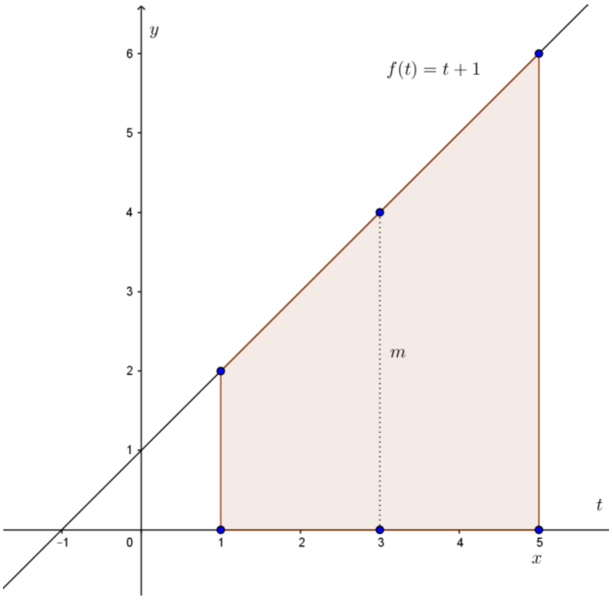
3. Stammfunktionen, unbestimmte Integrale



Einführendes Beispiel:
Wir berechnen elementargeometrisch

$$F_1(x) = \int_1^x (t+1)\,dt$$

$F_1(x)$ kann als Inhalt des farbigen Trapezes interpretiert werden.

Es gilt:

$F_1(x) = \frac{1}{2} m \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (2+x+1) \cdot (x-1)$ oder vereinfacht:
$F_1(x) == \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$

Es fällt auf, dass die 1. Ableitung von F_1 gerade mit der Randfunktion f übereinstimmt:
$F_1'(x) = f(x)$

Dies führt uns zur waghalsigen Vermutung, dass die Berechnung bestimmter Integrale mit dem Problem zusammenhängen könnte, Funktionen mit gegebener 1. Ableitung zu suchen.

Damit liegt die Einführung des folgenden Begriffs nahe:

> Definition:
> Eine Funktion F heisst eine Stammfunktion der Funktion f in einem Intervall $[a, b] \Leftrightarrow F' = f$ in $[a, b]$

Beispiel:

Sofern x > 0 ist $F(x) = \ln x$ eine Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{1}{x}$, denn $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Stammfunktionen sind nicht eindeutig bestimmt, denn die Addition einer Konstanten ändert die 1. Ableitung nicht. Es gilt aber auch umgekehrt:

> Satz:
> Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f in einem Intervall $[a, b]$, dann gilt:
> $F_2 = F_1 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Zwei verschiedene Stammfunktionen unterscheiden sich also höchstens in einer Konstanten c oder anschaulich: Die Graphen zweier Stammfunktionen gehen durch eine Parallelverschiebung auseinander hervor.

Beweis:
Die 1. Ableitung der Differenz $F_2 - F_1$ ist im Intervall [a,b] konstant 0, also ist $F_2 = F_1 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$, woraus die Behauptung folgt.

Wie das folgende Beispiel zeigt ist die Voraussetzung „in einem Intervall“ wesentlich:
Im folgenden Beispiel ist die Differenz der Stammfunktionen nicht konstant:

$F(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}+c_1 & x>0\\ -\frac{1}{x}+c_2 & x<0\end{cases}$ ist eine Stammfunktion von $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $\quad x \neq 0$

Die Differenz von F(x) und $-\dfrac{1}{x}$ ist nicht für jede Wahl von c_1 und c_2 konstant.

Aufgaben:
1.
Von einer Funktion g kennt man die 1. Ableitung $g'(x)=3x^2-4$ und $g(1)=2$.
Gesucht ist $g(x)$.

Da g eine Stammfunktion von g' ist gilt: $\quad g(x)=x^3-4x+c$

Die Bedingung $g(1) = 1 - 4 + 2$ gibt c = 5 und daraus die gesuchte Funktion g mit der Gleichung . $g(x)=x^3-4x+5$.

2.
Es ist zu zeigen, dass gilt: $F(x)=x\cdot(\ln x-1)+c$ ist eine Stammfunktion von $f(x)=\ln x$ $\quad$ x > 0.

Nachweis mit der Produktregel:

$$F'(x)=\left(x\cdot(\ln x-1)+c\right)'=1\cdot(\ln x-1)+x\cdot\frac{1}{x}=f(x)$$

3.
Es ist zu überprüfen, dass sowohl die Funktion $F(x)=\sin^2(x)$ als auch die Funktion $G(x)=-\frac{1}{2}\cos(2x)$ Stammfunktionen von $f(x)=\sin(2x)$ sind. Welche Folgerung ergibt sich daraus?

$F'(x)=2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)=\sin(2x)$

$G'(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)\cdot 2=\sin(2x)$

Folgerung: $\sin^2(2x)=-\frac{1}{2}\cdot\cos(2x)+c$

Setzt man x = 0 so erhält man. $0=-\frac{1}{2}+c$ also $c=\frac{1}{2}$ und daraus die bekannte Identität:

$\sin^2(x)=\frac{1}{2}\cdot(1-\cos(2x))$

Um die wiederholt auftretende Aussage wie etwa
"$\sin x + c$ ist die allgemeine Stammfunktion von $\cos x$"
abzukürzen, schreibt man kurz

$\int \cos x \, dx = \sin x + c$ „unbestimmtes Integral von $\cos x \, dx$“

Allgemein ist die Aussage $\int f(x)dx = F(x) + c$ gleichbedeutend mit der Aussage, dass $F(x)+c$ im Intervall $[a, b]$ die allgemeine Stammfunktion von f(x) ist, d.h. es gilt: $\left(F(x)+c\right)' = f(x)$

In Formeln und Tafeln sind die unbestimmten Integrale von wichtigen elementaren Funktionen aufgeführt, beispielsweise:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \in R, \quad n \neq -1$ Potenzregel Test: $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right)' = x^n$

$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c \quad x > 0$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$ Verwechslungsgefahr mit den Ableitungsregeln!

$\int \cos x\, dx = \sin x + c$

$\int e^x dx = e^x + c$

Aufgabe:
Es ist eine in der Formelsammlung aufgeführte Behauptung zu überprüfen:
$\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \sin x \cdot \cos x\right) + c$

Nachweis:

$$\left(\tfrac{1}{2}\left(x - \sin x \cdot \cos x\right) + c\right)' = \tfrac{1}{2}\left(1 - \left(\sin x \cdot \cos x\right)'\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sin^2 x - \cos^2 x\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(1 - \cos^2 x + \sin^2 x\right) = \sin^2 x$$

Übungsaufgabe:
Es ist zu zeigen, dass $\int x^2 \cdot e^x dx = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x + c$