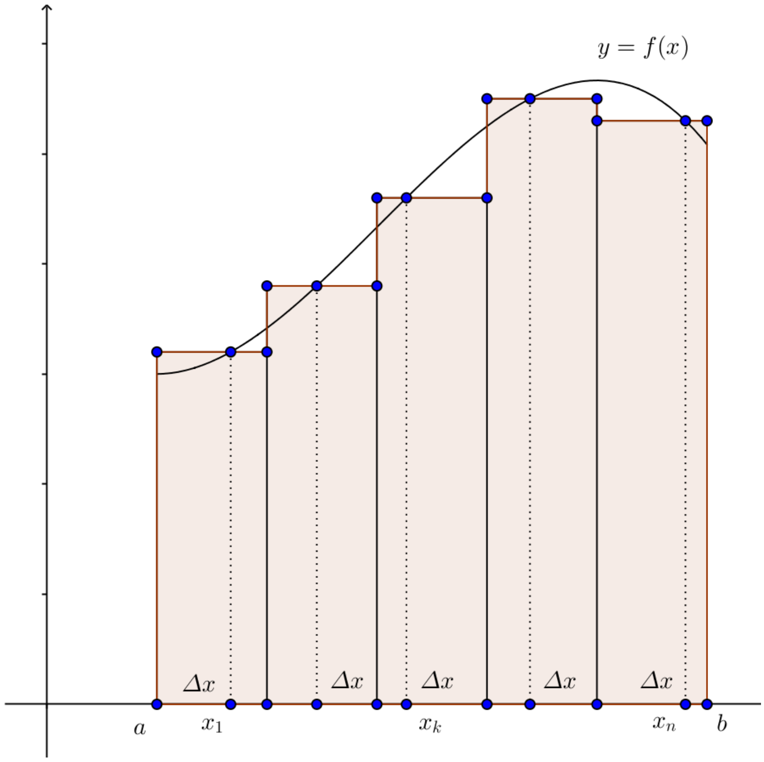
Volumen von Rotationskörpern

Die Fläche zwischen der stetigen Kurve $y = f(x)$, der x-Achse und den Parallelen $x = a$ und $x = b$ erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen sogenannten Rotationskörper. Gesucht ist das Volumen dieses Körpers.



Wir teilen das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle der Breite Δx (Skizze: $n = 5$). Wir ersetzen die im k-ten Teilintervall liegende Fläche durch ein Rechteck mit der Höhe $f(x_k)$ und der Breite Δx. Bei Rotation um die x-Achse erzeugt dieses Rechteck einen Zylinder mit Radius $f(x_k)$ und der Höhe Δx. Für das Volumen des aus n zylindrischen Scheiben bestehenden Treppenkörpers gilt dann:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot f^2(x_k)\,\Delta x$$

Das Volumen V des Körpers ist dann definiert durch:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot f^2(x_k)\,\Delta x$$

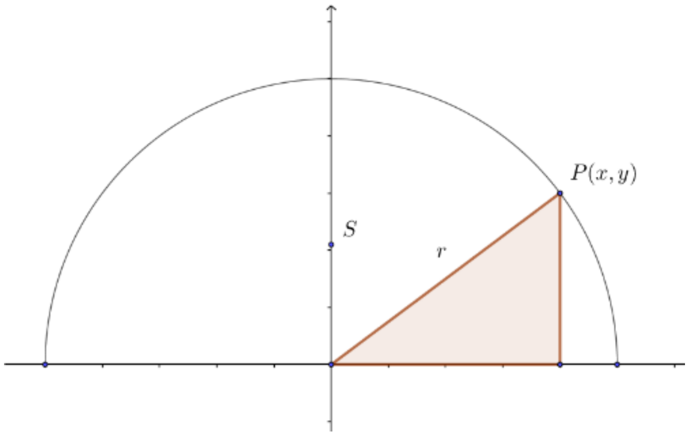
Der Grenzwert dieser Summe kann nach Definition des bestimmten Integrals in der folgenden Form geschrieben werden:

$$V = \int_a^b \pi \cdot f^2(x)\,dx = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Volumen eines Rotationskörpers bei Rotation um die x-Achse

Beispiele:

Kugelvolumen



Die Gleichung der Randkurve
$x^2 + y^2 = r^2$ ist nach
nach y^2 aufzulösen:

$y^2 = r^2 - x^2$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = 2\pi \cdot \int_{0}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx$$

$$= 2\pi \cdot \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4\pi}{3} r^3$$

Nach der so genannten **Fassregel von Simpson** gilt für das Volumen eines Körpers näherungsweise**:**
$V = \frac{1}{6} h \cdot (G + 4M + D)$
wobei G: Grundfläche, M Mittelfläche, D: Deckfläche

Der Test zeigt, dass für das Kugelvolumen diese Näherungsformel sogar exakt gilt:

$V = \frac{1}{6} \cdot 2r \cdot \left(0 + 4\pi r^2 + 0\right) = \frac{4}{3} \pi r^3$

Volumen eines Paraboloids

Das von der Parabel $y = a\sqrt{x}$ begrenzte Flächenstück erzeugt bei Rotation um die x- Achse ein so genanntes Paraboloid.

Der Parameter a ist so zu wählen, dass die Parabel durch den Punkt $P(h, r)$ geht:
$r = a\sqrt{h} \quad a = \frac{r}{\sqrt{h}}$

$$V = \pi \int_0^h a^2 \cdot x \, dx = \pi a^2 \cdot \frac{x^2}{2} \bigg|_0^h$$

$$= \pi \cdot \frac{r^2}{h} \cdot \frac{h^2}{2} = \frac{\pi r^2 h}{2}$$

$V = \dfrac{\pi r^2 h}{2}$	**Volumen eines Paraboloids**

Volumen eines Kegels

Skizze: $h = 9, r = 6$

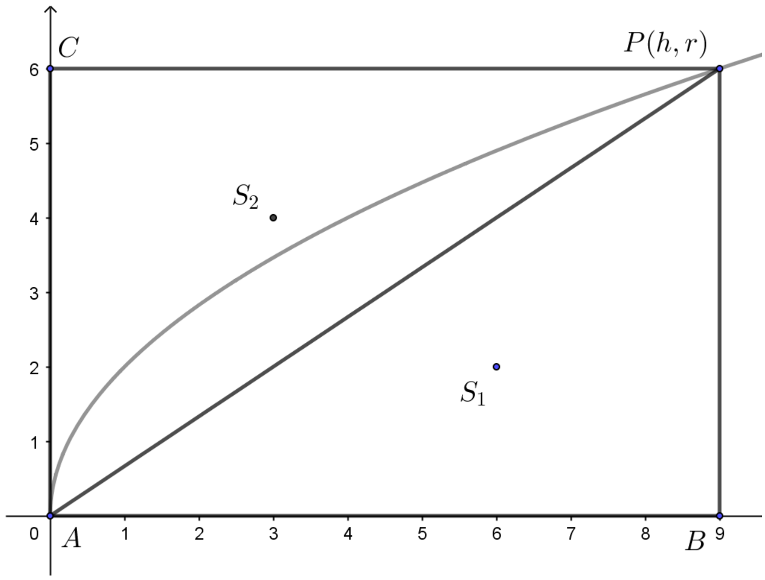
Das Dreieck ABP erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen Kegel.

Gleichung der Randkurve:

$$y = f(x) = \frac{r}{h} \cdot x$$

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x \right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \bigg|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$



$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$ **Volumen eines Kegels**

Vergleicht man in den folgenden Beispielen die Inhalte der rotierenden Flächen und die erzeugten Volumen so ergibt sich die folgende Zusammenstellung:

Körper	Anteil der rotierenden Fläche	Anteil Volumen
Zylinder	1	1
Kegel	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
Paraboloid	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

Flächenstücke, die näher bei der Drehachse liegen erzeugen kleinere Volumen als gleich grosse aber weiter entfernte. Es gilt nämlich die sogenannte

Guldin'sche Regel:
Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt des rotierenden Flächenstücks und dem Weg des Schwerpunkts.

Die y-Koordinate des Schwerpunkts S_2 im Dreieck APC ist doppelt so gross wie die des Schwerpunkts S_1 im Dreieck ABP. Das vom Dreieck APC erzeugte Volumen ist also doppelt so gross wie das vom Dreieck ABP erzeugte Volumen.

Mit der Guldinschen Regel kann der Schwerpunkt eines Halbkreises bestimmt werden:

$\frac{4}{3}\pi r^3$	Kugelvolumen
$\frac{1}{2}\pi r^2$	Inhalt des Halbkreises
$2\pi y_S$	Weg des Flächenschwerpunkts

$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2}\pi r^2 \cdot 2\pi y_2$ Guldinsche Regel

$y_S = \frac{4}{3\pi}\cdot r \approx 0.42\cdot r$ y-Koordinate des Schwerpunkts

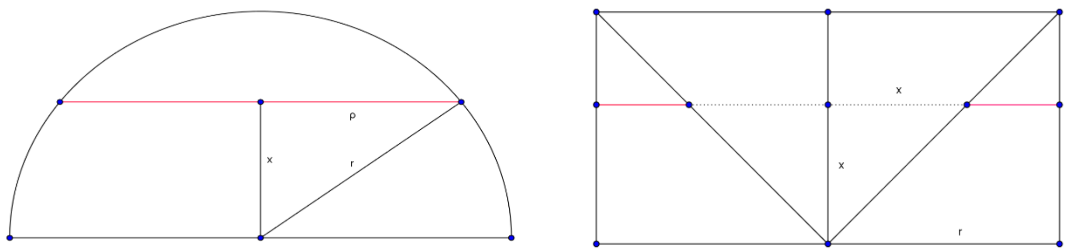
Die Formel für das Volumen einer Kugel war bereits Cavalieri bekannt, nach dem folgenden

Prinzip von Cavalieri:

Stehen zwei Körper auf derselben Ebene und werden sie von jeder Parallelebene in flächengleichen Figuren geschnitten, so haben sie denselben Rauminhalt.

Für die Kugel führt die folgende Idee auf die Volumenformel:

Von einem Zylinder mit Radius r und Höhe r wird der einbeschriebene Kegel subtrahiert.
Zeige: Dieser Körper und eine Halbkugel haben die gleiche Querschnittsfunktion.



Halbkugel:
Der Querschnitt in der Höhe x ist ein Kreis mit Radius ρ und dem Inhalt $\pi\rho^2 = \pi\left(r^2 - x^2\right)$

Vergleichskörper:
Der Querschnitt ist ein Kreisring mit den Radien r und x und dem Inhalt: $\pi\left(r^2 - x^2\right)$

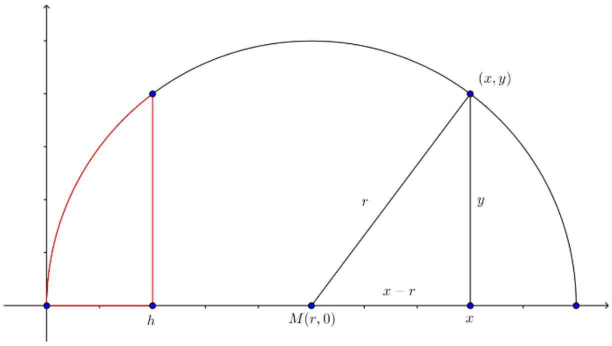
Da die beiden Schnitte flächengleich sind, folgt nach dem Prinzip von Cavalieri, dass das Volumen des Vergleichskörpers gleich dem Volumen der Halbkugel ist.
Volumen des Vergleichskörpers (Differenz der Volumen eines Zylinders und eines Kegels.

$\frac{1}{2}V = \pi r^2 \cdot r - \frac{\pi r^2 \cdot r}{3} = \frac{2}{3}\pi r^3$.

Damit ergibt sich erneut das Kugelvolumen.

Kugelsegment der Höhe h

Wahl eines geeigneten Koordinatensystems:
Der Kreis mit Mittelpunkt $M(0,0)$ und
Radius r wird um r in x-Richtung verschoben.



Die Gleichung des verschobenen Kreises:
$(x-r)^2 + y^2 = r^2$
wird nach y^2 aufgelöst:

$$y^2 = 2rx - x^2$$

$$V = \pi\int_0^h \left(2rx - x^2\right)dx = \pi\left(rx^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^h = \pi\left(rh^2 - \frac{h^3}{3}\right) = \frac{\pi h^2}{3}\cdot(3r-h)$$

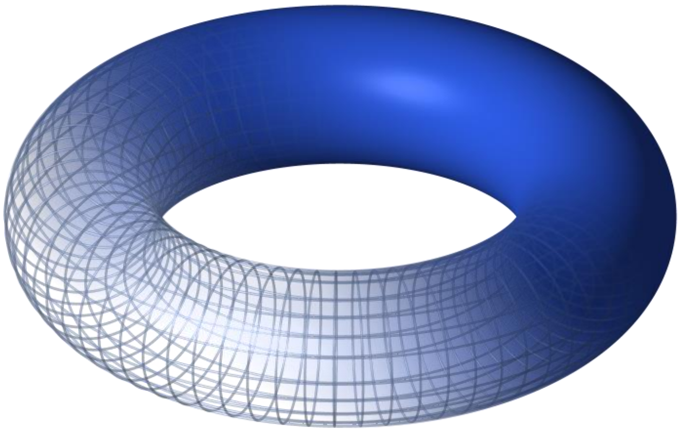
$V = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot (3r-h)$	**Kugelsegment der Höhe**

Kontrolle:
Im Falle $h = 2r$ ergibt sich erneut das Kugelvolumen.

Volumen eines Torus

Ein Kreis mit Mittelpunkt M(0/a) und Radius r < a erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen sogenannten Torus.

Grafik → Wikipedia



Gleichung der Randkurven:
oberer Halbkreis:

$y_1 = a + \sqrt{r^2 - x^2} = a + b$ mit $b = \sqrt{r^2 - x^2}$

unterer Halbkreis

$y_2 = a - \sqrt{r^2 - x^2} = a - b$

daraus ergibt sich (*)

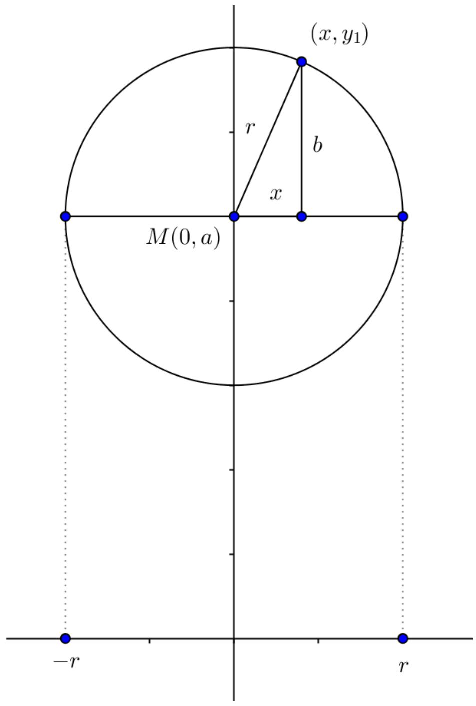
$$y_1^2 - y_2^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab = 4a\sqrt{r^2 - x^2}$$

und schliesslich

$$V = 2\pi \int_0^r 4a \cdot \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 2\pi \cdot 4a \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

$$= 2\pi \cdot 4a \cdot \frac{\pi r^2}{4}$$

Das Integral entspricht dem Inhalt eines Viertelskreises mit Radius r.



$V = r^2 \pi \cdot 2a\pi$	**Volumen eines Torus**

Der Guldin'schen Regel entsprechend ist das Volumen des Torus gleich dem Produkt aus dem Inhalt der rotierenden Fläche und dem Weg des Flächenschwerpunkts.

zu (*)

Hin und wieder wird fälschlicherweise als Integrand $(y_1 - y_2)^2$ gewählt (falsche Analogie zur Formel für die von zwei Kurven eingeschlossene Fläche). Dies würde im Widerspruch zur Guldinschen Regel ja bedeuten, dass der Abstand der rotierenden Fläche keinen Einfluss auf das Volumen hat.

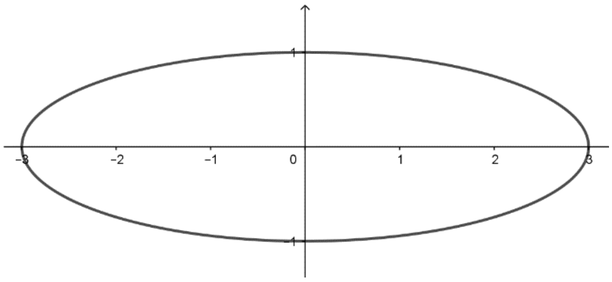
Übungsaufgaben

1.
Volumen eines Ellipsoids:

The volume of the solid obtained by revolving the region enclosed by the ellipse $x^2 + 9y^2 = 9$ is …

$$V = 2 \cdot \tfrac{\pi}{9} \cdot \int_0^3 (9 - x^2)\, dx =$$

$$= 2 \cdot \tfrac{\pi}{9} \cdot (9x - \tfrac{1}{3} \cdot x^3 \;\Big|_0^3 = 4\pi$$



2.
Volumen eines Kegelstumpfs

Das von der Randkurve

$$y = f(x) = \frac{(R-r)}{h} \cdot x + r$$

im Intervall $[0, h]$ begrenzte Gebiet erzeugt bei der Rotation um die x-Achse einen Kegelstumpf mit dem Volumen

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{(R-r)}{h} \cdot x + r \right)^2 dx$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{(R-r)^2}{h^2} \int_0^h x^2 \; dx + \frac{r \cdot (R-r)}{h} \cdot \int_0^h 2x \; dx + r^2 \cdot \int_0^h dx \right)$$

$$= \pi\pi \cdot \left(\frac{(R-r)^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} + \frac{r \cdot (R-r)}{h} \cdot h^2 + +r^2 \cdot h \right)$$

$$= \frac{\pi h}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)$$

Kontrolle:
Im Spezialfall $r = 0$ ergibt sich erneut das Kegelvolumen.