

11. Uneigentliche Integrale

Die bisherige Definition des bestimmten Integrals setzt voraus, dass der Integrand in einem abgeschlossenen endlichen Intervall $[a, b]$ stetig ist. Im Folgenden wird gezeigt, dass unter gewissen Voraussetzungen als Integrationsgrenzen auch ∞ oder eine Polstelle als Integrationsgrenzen möglich sind. Man spricht in diesem Fall von uneigentlichen Integralen.

Uneigentliche Integrale vom Typ $\int_a^{\infty} f(x) dx$

Einführende Aufgabe:

Gesucht ist der Inhalt $A(u)$ der Fläche, die von der Kurve

$$y = f(x) = \frac{3}{x^2}, \text{ der } x\text{-Achse und den}$$

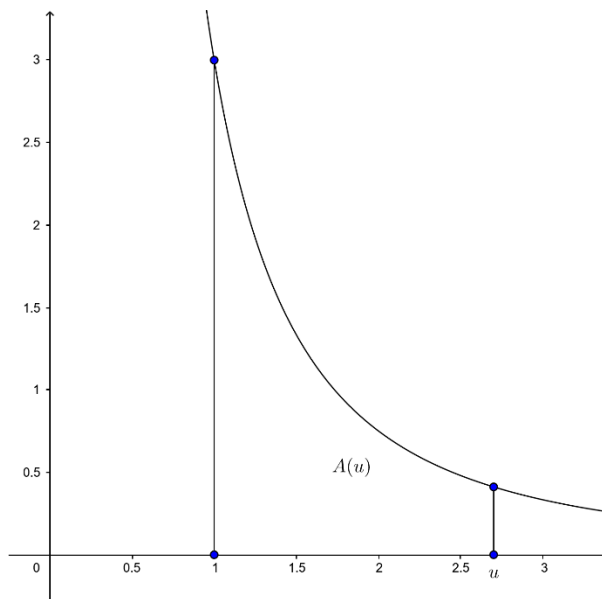
Geraden $x = 1$ und $x = u$ ($u > 1$) begrenzt wird.

$$A(u) = \int_1^u \frac{3}{x^2} dx = -\frac{3}{x} \Big|_1^u = \frac{3}{x} \Big|_u^1 = 3 - \frac{3}{u}$$

Da der Grenzwert für u gegen unendlich in diesem Fall existiert, schreibt man:

$$\int_1^{\infty} \frac{3}{x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} A(u) = 3$$

Anschaulich bedeutet dies, dass das ins Unendliche reichende Flächenstück den Inhalt 3 hat.



Dreht man die Fläche um die x -Achse, so entsteht ein Körper mit dem Volumen $V(u)$.

$$V(u) = \pi \int_1^u \frac{9}{x^4} dx = 9\pi \cdot \left(-\frac{1}{3x^3} \right) \Big|_1^u = 9\pi \cdot \left(\frac{1}{3x^3} \right) \Big|_u^1 = 3\pi \cdot \left(1 - \frac{1}{u^3} \right)$$

Da auch in diesem Fall der Grenzwert für u gegen ∞ existiert, schreibt man

$$\pi \cdot \int_1^{\infty} \frac{9}{x^4} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} V(u) = 3\pi$$

Ersetzt man die Funktion $f(x) = \frac{3}{x^2}$ durch $f(x) = \frac{1}{x}$, so erhält man für $A(u) = \ln u$ und

$$V(u) = \pi \left(1 - \frac{1}{u} \right)$$

Da der Grenzwert von $A(u)$ für u gegen ∞ keinen endlichen Wert hat, ist das uneigentliche Integral divergent. Der Grenzwert von $V(u)$ hingegen ist π , das uneigentliche Integral ist konvergent. Das paradox erscheinende Ergebnis bedeutet anschaulich, dass eine Fläche mit unendlich grossem Inhalt einen Körper mit endlichem Volumen erzeugt.

Das allgemeine Vorgehen:

Zunächst wird über das endliche Intervall $[a, u]$ integriert. Der Wert des Integrals $A(u)$ hängt noch von u ab. Existiert der Grenzwert für u gegen unendlich so legt man fest:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u f(x) dx$$

Die eine Integralgrenze ist eine Polstelle

In der folgenden Aufgabe hat die gegebene Funktion an einer der Intervallgrenzen eine Polstelle:

Aufgabe:

Gesucht ist der Inhalt $A(u)$ der von der Kurve

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad x < 1,$$

von den Koordinatenachsen und der Geraden $x = u$ ($u < 1$) begrenzten Fläche.

$$A(u) = \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^u = \left(2\sqrt{1-x}\right)\Big|_u^0 = 2 - 2\sqrt{1-u}$$

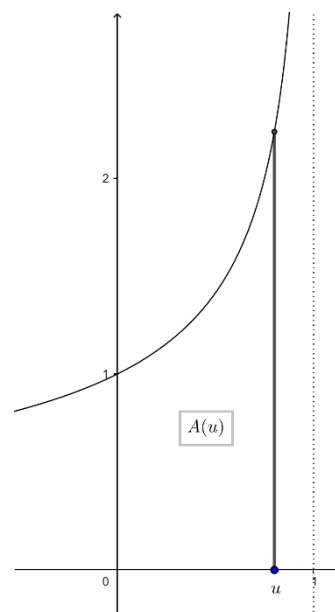
Da der Grenzwert $A(u)$ für u wachsend gegen 1 existiert, definiert man:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{u \uparrow 1} A(u) = 2$$

Dreht man die Fläche mit dem Inhalt $A(u)$ um die x -Achse so entsteht ein Rotationskörper mit dem Inhalt

$$V(u) = \pi \int_0^u \frac{dx}{1-x} = \pi \cdot [(\ln|1-x|)]_u^0 = -\pi \cdot \ln|1-u|$$

Strebt u wachsend gegen 1, so strebt $V(u)$ gegen $-\infty$. Das uneigentliche Integral existiert in diesem Fall nicht. Anschaulich bedeutet dies: Obwohl die erzeugende Fläche einen endlichen Inhalt hat, erzeugt sie kein endliches Volumen.



Die Γ -Funktion

Die Γ -Funktion ist als uneigentliches Integral definiert. Ihre Bedeutung liegt u.a. darin, dass sie die Fakultäten interpoliert.

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$$

Es kann gezeigt werden, dass dieses uneigentliche Integral für $x > 0$ existiert.

$$\Gamma(1) := \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

mit partieller Integration

$$\Gamma(2) := \int_0^{\infty} t \cdot e^{-t} dt = [- (t + 1) \cdot e^{-t}]_0^{\infty} = 1$$

$$\Gamma(3) := \int_0^{\infty} t^2 \cdot e^{-t} dt = [- (t^2 - 2t + 2) \cdot e^{-t}]_0^{\infty} = 2$$

Herleitung einer Rekursionsformel für $\Gamma(x)$ mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &:= \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt \\ &= [-t^{x-1} \cdot e^{-t}]_0^{\infty} - (x-1) \int_0^{\infty} t^{x-2} \cdot (-e^{-t}) dt = (x-1) \cdot \Gamma(x-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= e^{-t} & f(t) &= -e^{-t} \\ g(t) &= t^{x-1} & g'(t) &= (x-1)t^{x-2} \end{aligned}$$

Damit gilt die Rekursionsformel:

$\Gamma(x) = (x-1) \cdot \Gamma(x-1)$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 6$$

Allgemein:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$