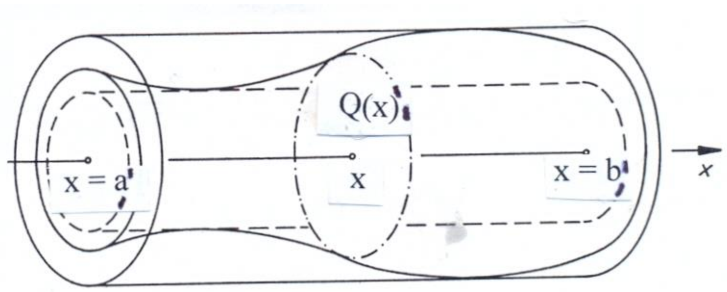
Volumen von Körpern mit bekannter Querschnittsfunktion

Die Berechnung des Volumens von Körpern ist ebenfalls möglich, wenn die Querschnittsfunktion Q bekannt ist.



Ein Körper, der zwischen den Ebenen $x = a$ und $x = b$ liegt, wird für jedes $x \in [a, b]$ mit Normalebenen zur x-Achse geschnitten. $Q(x)$ sei der Inhalt der Querschnittsfläche an der Stelle x. Gesucht ist das Volumen dieses Körpers.

Das Intervall $[a, b]$ wird in n Teilintervalle der Breite Δx geteilt. Die $n + 1$ Normalebenen durch die Grenzen der Teilintervalle zerlegen den Körper in Scheiben der Höhe Δx. Der im k-ten Teilintervall liegende Teilkörper kann durch einen zylindrischen Körper mit der Grundfläche $Q(x_k)$ angenähert werden, wobei x_k eine beliebige Stelle im k-ten Teilintervall bedeutet.

Für das Volumen V_n dieses aus n zylindrischen Scheiben bestehenden Treppenkörpers gilt:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} Q(x_k)\,\Delta x$$

Das Volumen V des Körpers ist dann definiert durch:

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} Q(x_k)\,\Delta x$$

Der Grenzwert dieser Summe kann nach Definition des Bestimmten Integrals in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\boxed{V = \int_a^b Q(x)\,dx \quad \text{Volumen des Körpers mit der Querschnittsfunktion } Q(x)}$$

Das Resultat stimmt überein mit der Formel zur Berechnung des Volumens von Rotationskörpern, für die gilt

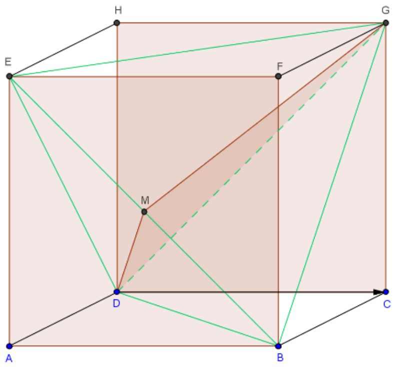
$$Q(x) = \pi \cdot f^2(x)$$

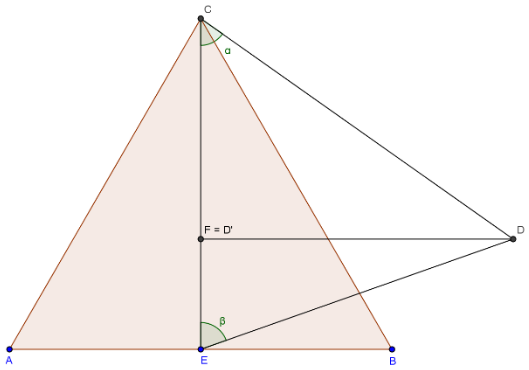
Herleitungsvariante:
Es ist zu zeigen, dass Die Volumenfunktion differenzierbar ist und dass gilt:
$V'(x) = Q(x)$ d.h. V ist eine Stammfunktion von x.

Beispiele, bei denen die Querschnittsfunktion Q(x) angegeben werden kann:

Das Volumen des Tetraeders

Ein Tetraeder wird von 4 gleichseitigen Dreiecken begrenzt. Es kann durch Verbinden geeigneter Ecken eines Würfels dargestellt werden.





In der Abbildung rechts ist der Grundriss des Tetraeders ABCD mit der Grundfläche ABC in der xy-Ebene dargestellt. Legt man einen geeigneten Schnitt in die Grundebene um, so entsteht das gleichschenklige Dreieck CED, wobei die Tetraederseite gleich der Flächendiagonalen des links dargestellten Würfels ist. Die Schenkel sind gleich der Höhe des gleichseitigen Dreiecks.

Nach Pythagoras gelten für das gleichseitige Dreieck mit der Seite a die folgenden Formeln

Höhe: $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$

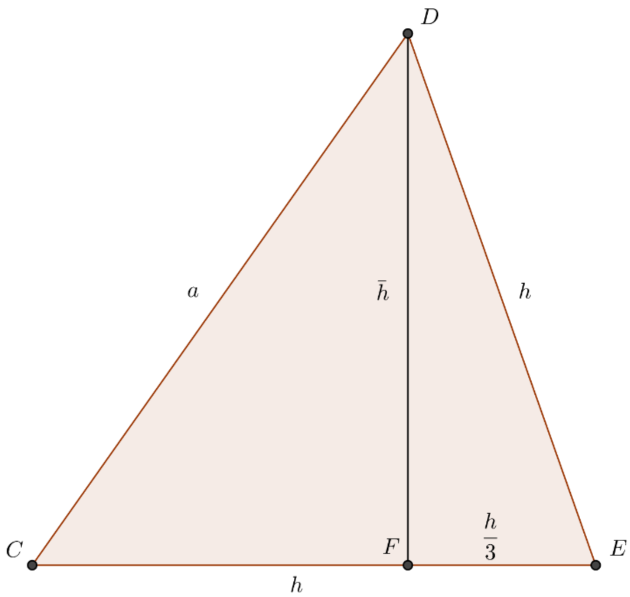
Flächeninhalt $G = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$

Die Tetraederhöhe $\bar{h}$ kann im Dreieck DFE nach Pythagoras berechnet werden:

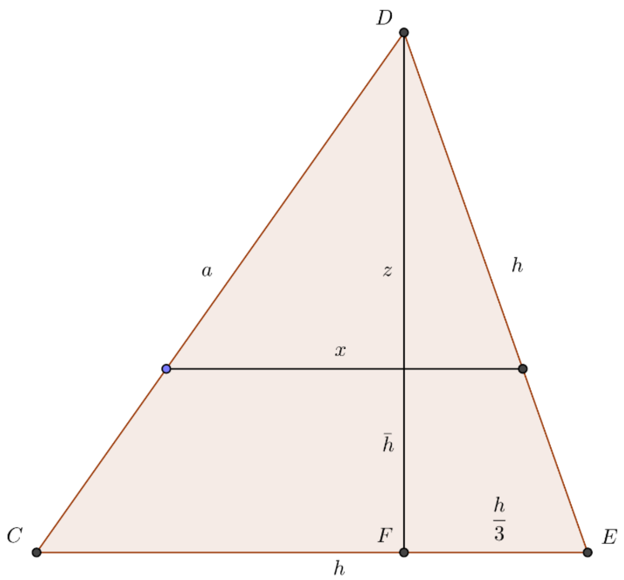
$\bar{h}^2 = h^2 - \frac{1}{9} \cdot h^2 = \frac{8}{9} \cdot h^2$

oder

$\bar{h} = \sqrt{\frac{8}{9}} \cdot h$



Ein Schnitt des Tetraeders im Abstand z von D ergibt als Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe x. Dieses wird bei einer zentrischen Streckung mit Zentrum D und Massstab k in die Grundfläche abgebildet wird.
Da bei ähnlichen Figuren das Verhältnis entsprechender Strecken konstant ist gilt:



$k = \frac{x}{h} = \frac{z}{\bar{h}}$ oder $= \frac{z}{h^*} \cdot h$

Für das Flächenverhältnis gilt damit

$$k^2 = \frac{G(z)}{G} = \frac{z^2}{{h^*}^2}$$

$$G(z) = \frac{z^2}{{h^*}^2} \cdot G$$

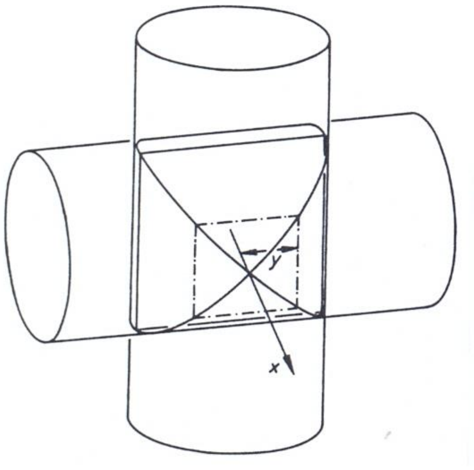
Für das Tetraedervolumen V gilt damit

$$\int_0^{h^*} \frac{z^2}{{h^*}^2} \cdot G\,dz = \frac{G}{{h^*}^2}\left[\frac{1}{3} \cdot z^3\right]_0^{h^*} = \frac{1}{3} \cdot \frac{G}{{h^*}^2} \cdot {h^*}^3$$

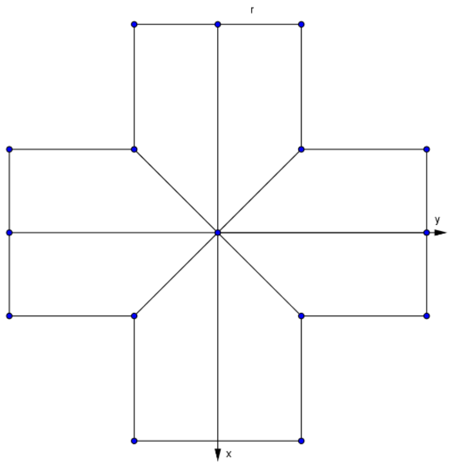
$$= \frac{1}{3} \cdot G \cdot h^* = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \cdot \sqrt{\frac{8}{9}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

$V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$	**Volumen eines regulären Tetraeders**

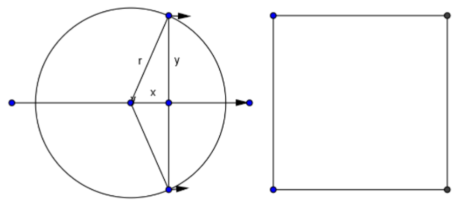
Gemeinsames Volumen zweier Zylinder mit gleichem Radius, die sich senkrecht durchdringen.



Grundriss



Seitenriss



Die Querschnittsfläche im Abstand x von der yz-Ebene ist ein Quadrat, dessen Eckpunkte auf den Schnittlinien der beiden Zylinder liegen. Die Quadratseite ist 2y, wobei
$x^2 + y^2 = r^2$ oder bzw.$y^2 = r^2 - x^2$
Damit gilt für die Querschnittsfläche:

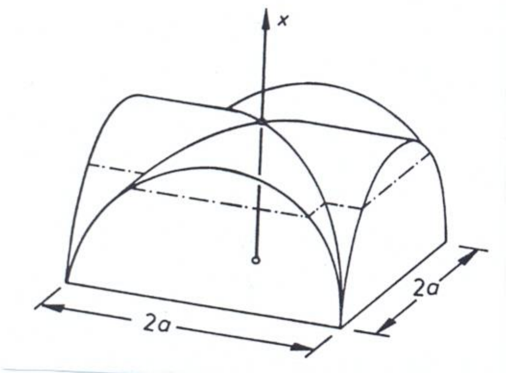
$$Q(x) = \left(2\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 = 4\left(r^2 - x^2\right)$$

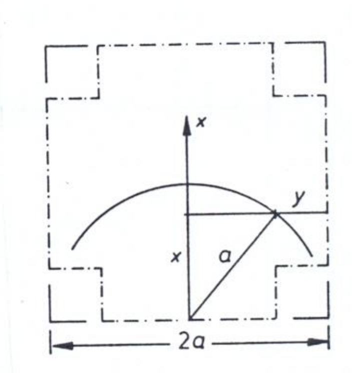
und für das Volumen:

$$V = 2\int_0^r 4\left(r^2 - x^2\right)dx = 8\int_0^r \left(r^2 - x^2\right)dx = 8 \cdot \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^r = \tfrac{16}{3} r^3$$

$V = \tfrac{16}{3} r^3$	**Gemeinsames Volumen zweier Zylinder**

Volumen eines Tonnenkreuzgewölbes





Wird der Körper in der Höhe x geschnitten, so entsteht ein Quadrat mit der Seite 2a, an dessen Ecken ein Quadrat mit der Seite $y = a - \sqrt{a^2 - x^2}$ fehlt. Damit gilt mit:

$$y^2 = a^2 - 2a\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 - x^2$$

$$Q(x) = 4(a^2 - y^2) = 4(2a\sqrt{a^2 - x^2} + x^2 - a^2)$$

$$V = 4 \cdot 2a \cdot \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx - 4 \cdot \int_0^a \left(a^2 - x^2\right) dx$$

$$V = 4 \cdot 2a \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx - 4\left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^a$$

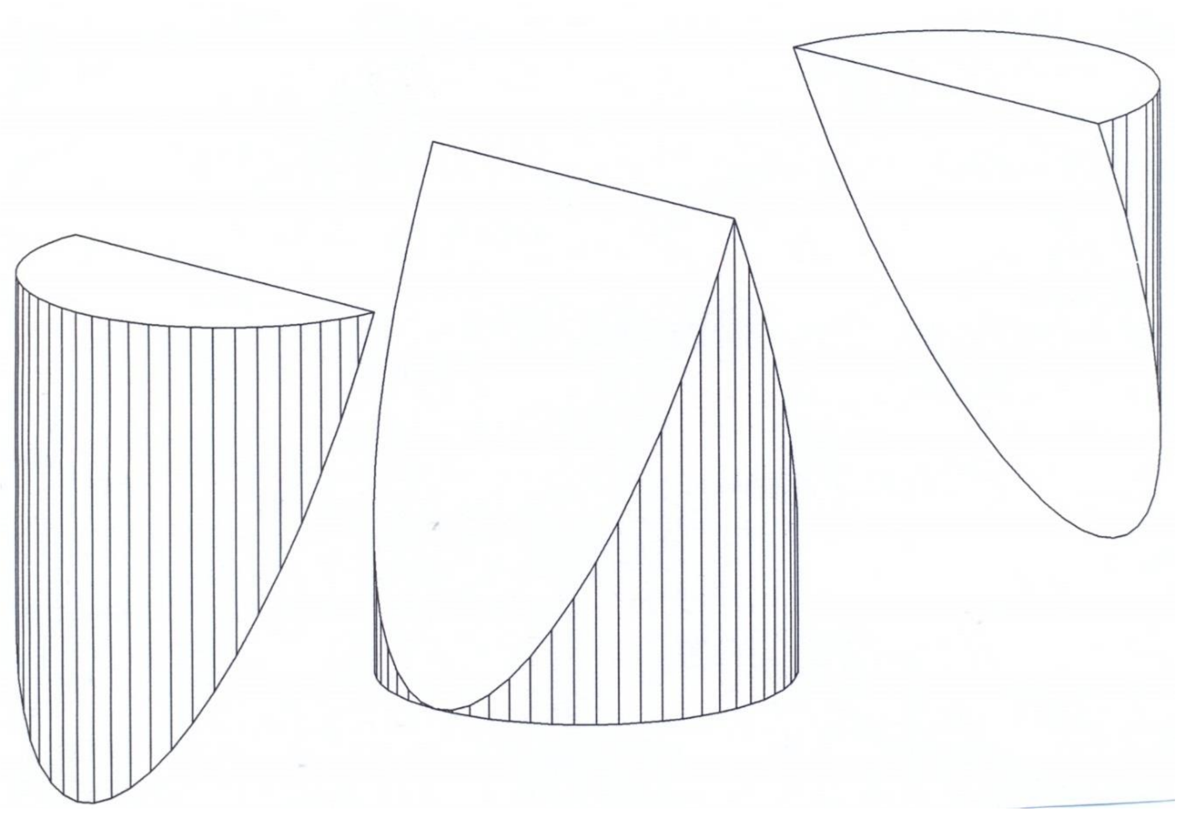
Das erste Integral ist gleich dem Inhalt eines Viertelskreises mit Radius a

$$V = 8a \cdot \frac{\pi a^2}{4} - 4\left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = 4a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)$$

$$\boxed{V = 4a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)}$$ **Volumen des Tonnenkreuzgewölbes**

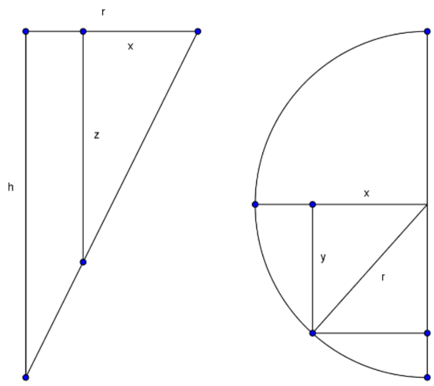
Ergebnis:
Das Volumen des Tonnenkreuzgewölbes macht überraschenderweise etwa 90% des umbeschriebenen Quaders aus.

Volumen eines Hufkörpers



ac

Schneidet man den Körper im Abstand x, so entsteht ein Rechteck mit den Seiten 2y und z.



Nach dem Strahlensatz gilt:

$\frac{z}{x} = \frac{h}{r}$ oder $z = \frac{h}{r} \cdot x$

Wegen $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ergibt sich

$$Q(x) = 2zy = \frac{2h}{3} \cdot x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$$

und damit das Volumen zu

$$V = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{2h}{r} \cdot \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2} \cdot x \cdot (-2) \right) dx$$

$$= \frac{h}{r} \cdot \int_0^{r^2} \sqrt{z}\, dz = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{h}{r} \cdot z^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{r^2} = \tfrac{2}{3} r^2 h$$

$V = \tfrac{2}{3} r^2 h$	**Volumen eines Hufkörpers**