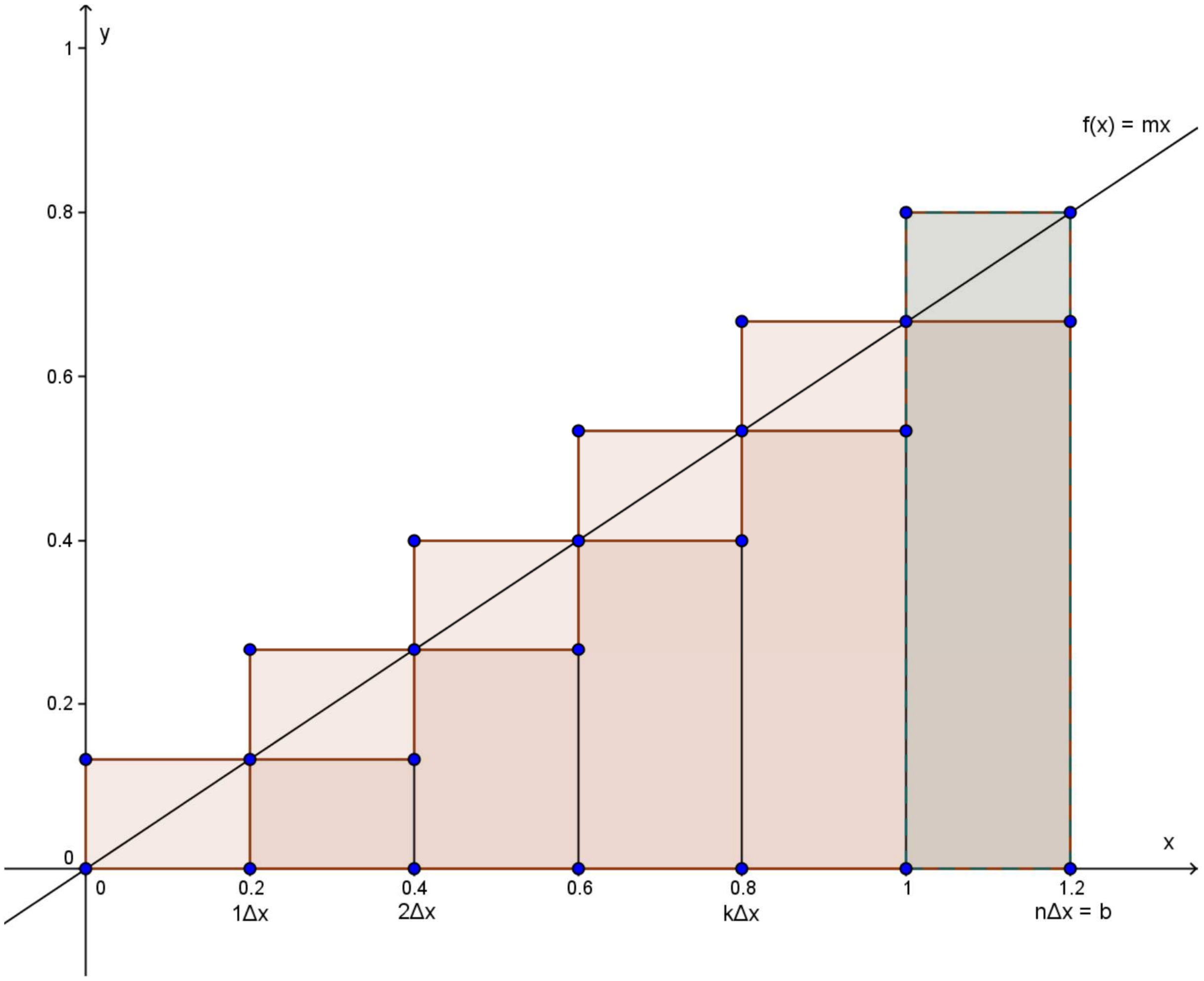
2. Definition des bestimmten Integrals

Die Idee des bestimmten Integrals wird anhand der folgenden Aufgabe vorgestellt, bei der das Resultat bereits von vorne herein bekannt ist.

Aufgabe:
Bestimme den Inhalt des von der Geraden y = mx , der x-Achse und der Geraden x = b (b > 0) eingeschlossenen Gebiets.

wähle für die Skizze b = 1.2, $m = \frac{2}{3}$, n = 6 und damit Δx = 0.2 (Einheit: 20 Häuschen).



Wir unterteilen das Intervall [0,b] in n Teilintervalle der Breite $\Delta x = \dfrac{b}{n}$ und berechnen den Inhalt der äusseren Treppenfläche, die sogenannte n-te Obersumme O_n bzw. den Inhalt der inneren Treppenfläche, die sogenannte n-te Untersumme U_n.

$$O_n = m \cdot \Delta x \cdot \left(1 \cdot \Delta x + 2 \cdot \Delta x + ... + n \cdot \Delta x\right)$$
$$= m \cdot \left(\Delta x\right)^2 \cdot \left(1 + 2 + 3 + ... + n\right) = m \cdot \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n \cdot \left(n+1\right)}{2} = \frac{mb^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Die n-te Unter- bzw. n-te Obersumme unterscheiden sich im Inhalt des in der Skizze blau gefärbten Rechtecks mit der Höhe m·b und der Breite Δx .

$U_n = O_n - m \cdot b \cdot \frac{b}{n}$.

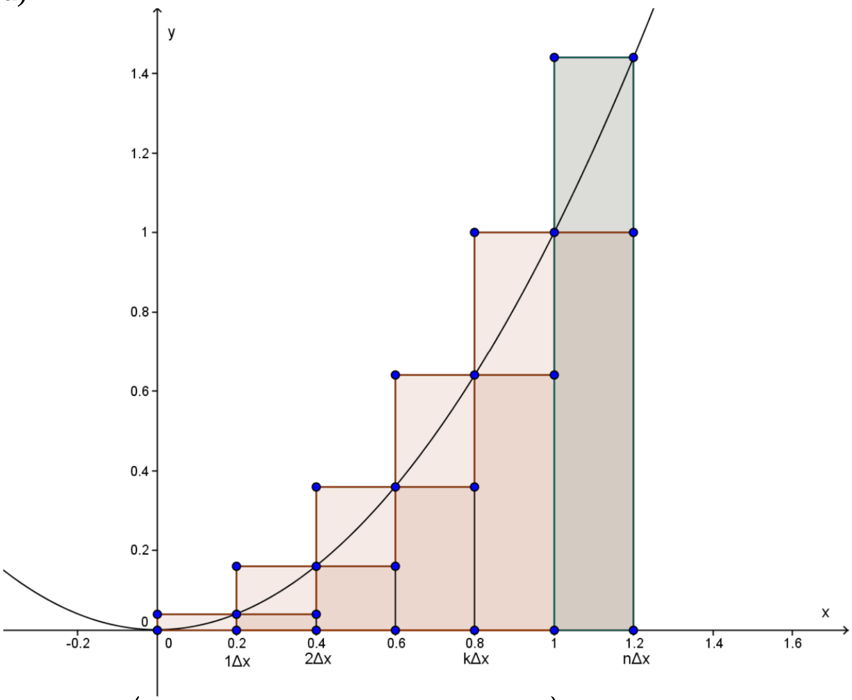
Der Inhalt des betrachteten Flächenstücks ist als gemeinsamer Grenzwert dieser Unter- bzw. Obersummen (Intervallschachtelung) definiert.

$$A = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{mb^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{mb^2}{2} = \tfrac{1}{2} b \cdot mb$$

Der eben berechnete Grenzwert heisst ein bestimmtes Integral. Nach Leibniz schreibt man dafür: $\int_0^b mx dx = \frac{mb^2}{2}$ „bestimmtes Integral über mx dx von 0 bis b“

Uebungsaufgaben:
Löse dieselbe Aufgabe
a) für die Funktion f(x) = x^2 , b) für die Funktion f(x) = ax^3. $a \in R$

a)



$$O_n = \Delta x \cdot \left((1 \cdot \Delta x)^2 + (2 \cdot \Delta x)^2 + \ldots + (n \cdot \Delta x)^2\right)$$
$$= (\Delta x)^3 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right)$$

Wegen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{und } \Delta x = \frac{b}{n} \text{ gilt:}$$

$$O_n = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} =$$
$$= \frac{b^3}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

Für die n-te Untersumme gilt:

$$U_n = O_n - \frac{b^3}{n}$$

d.h. n-te Unter-bzw. Obersumme unterscheiden sich im Inhalt des in der Skizze blau gefärbten Rechtecks. Der Inhalt des betrachteten Flächenstücks ist als gemeinsamer Grenzwert dieser Unter- bzw. Obersummen (Intervallschachtelung) definiert.

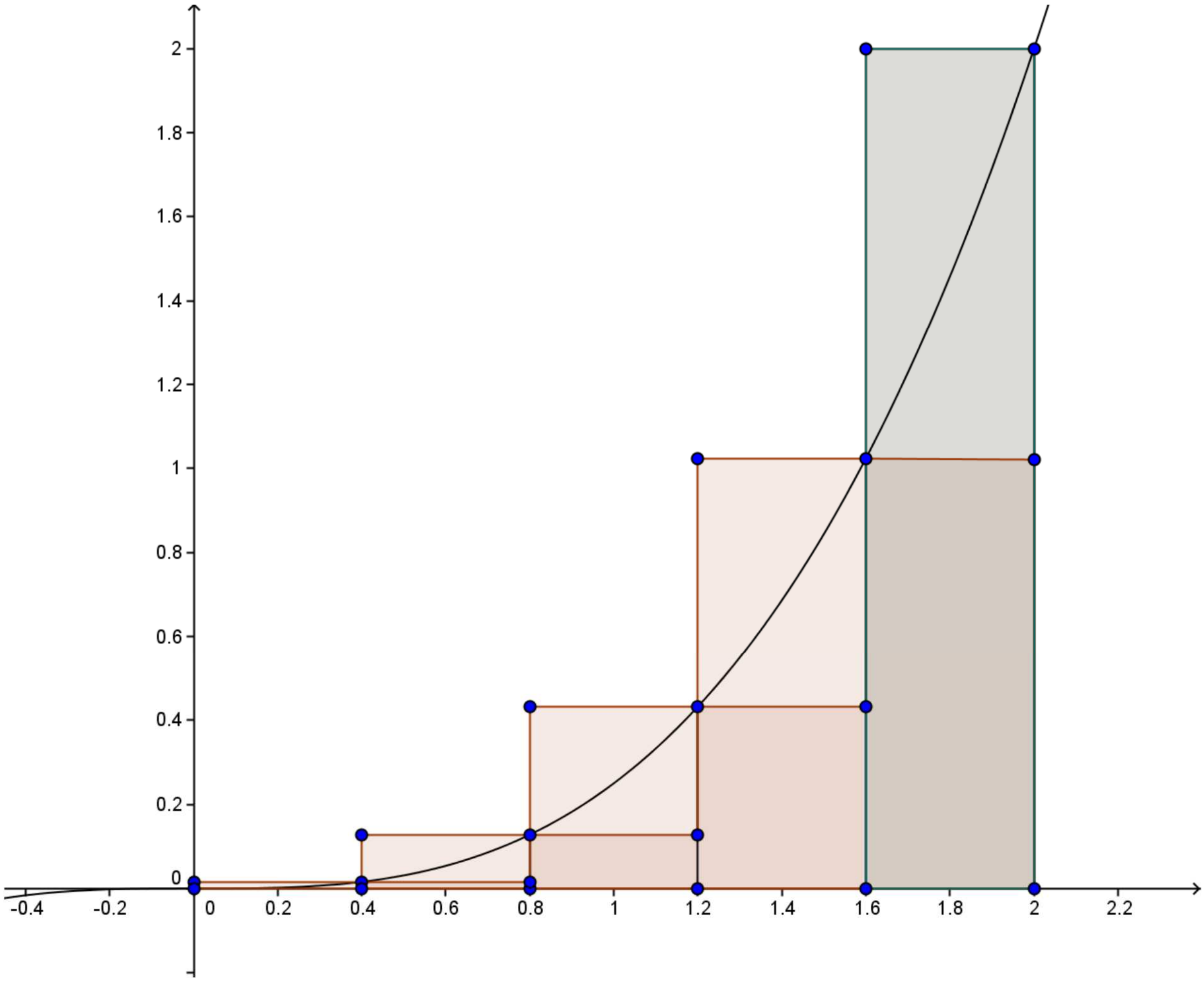
$$A = \lim_{n \to \infty} O_n = \lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} \frac{b^3}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{b^3}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{b^3}{3}$$

ein Drittel des Inhalts des umbeschriebenen Rechtecks.

Nach Leibniz schreibt man für diesen eben berechnete Grenzwert

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$ „bestimmtes Integral über x^2dx von 0 bis b“

b) f(x) = ax^3 Skizze b = 2, $a = \frac{1}{4}$, n = 5 und damit $\Delta x = 0.4$



Bei der Herleitung wird eine Formel für die Summe der Kubikzahlen benötigt, die man durch induktives Schliessen finden kann (Beweis mit vollständiger Induktion).

$1^3 = 1^2$
$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

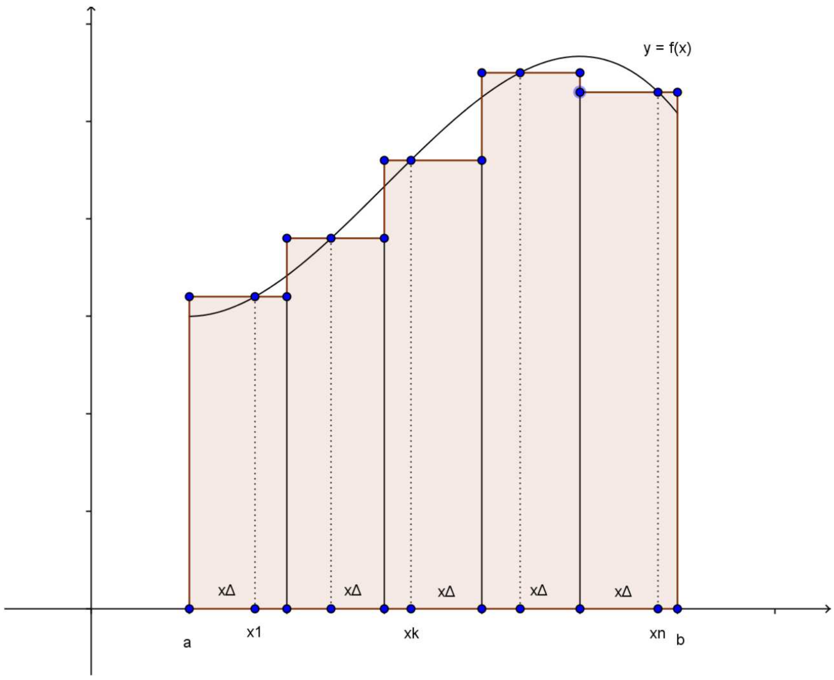
$$A = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{b^4}{4}$$

Ergebnis: $\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$

allg. Fall:

Die Funktion f sei im Intervall [a/b] stückweise stetig.

Die bisherigen Beispiele weisen darauf hin, dass das bestimmte Integral nicht davon abhängt, ob man in den Teilintervallen den kleinsten (für die Untersummen) oder den grössten Funktionswert (für die Obersummen) wählt. Für die Definition des bestimmten Integrals betrachtet man deshalb etwas allgemeiner Zwischensummen statt der Unter- bzw. Obersummen.



1. Teile das Intervall in n Teilintervalle der Breite Δx
2. Wähle in jedem Teilintervall eine Zwischenstelle x_k .Diese Zwischenstellen legen in jedem Teilintervall die Höhe $f(x_k)$ des Rechtecks fest..
3. Bilde die sogenannten Riemann'schen Summen
   $$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + ... + f(x_n)\cdot\Delta x\,.$$
   Die Riemannschen Summen können - falls f(x) nichtnegativ ist - als Näherungswert für den gesuchten Flächeninhalt aufgefasst werden.

Es kann gezeigt werden, dass der Grenzwert der Riemann'schen Summen für n gegen unendlich eindeutig bestimmt ist (unabhängig von der Wahl der Zwischenstellen x_k), sofern f im Intervall [a,b] stückweise stetig ist.
Dieser eindeutig bestimmte Grenzwert heisst bestimmtes Integral der Funktion f im Intervall [a/b] und wird nach Leibniz mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet.

Def. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$

kurz: bestimmte Integrale sind als Grenzwert der Riemannschen Summen definiert (bzw. als der gemeinsame Grenzwert der Unter- bzw. Obersummen.

Bem. 1:
Für nichtnegative f gibt der Wert des bestimmten Integrals den Inhalt des von der Kurve und der x-Achse im Intervall [a/b] eingeschlossenen Flächenstücks an.

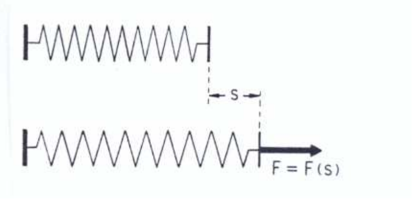
Bem. 2:
Der Name der Integrationsvariable kann durch einen beliebigen andern Namen ersetzt werden, ohne dass sich der Wert des Integrals ändert:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz$$

Bem. 3:
Die Anwendung der Idee des bestimmten Integrals als Grenzwert der Riemann'schen Summen in der Physik führt z. B. zu den Aussagen:

Fahrtenschreiber: $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$

mechanische Arbeit: $W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\,ds$



Allgemein ermöglicht die Integralrechnung den Schluss von Änderungen eines Verlaufs auf den Gesamtverlauf

Die Beispiele zeigen aber auch, wie mühsam die Berechnung bestimmter Integrale nach Definition als gemeinsamer Grenzwert der Ober- bzw. Untersummen ist, denn es treten u.U. komplizierte Summen auf. Wir suchen deshalb einen andern Weg, um bestimmte Integrale zu berechnen.