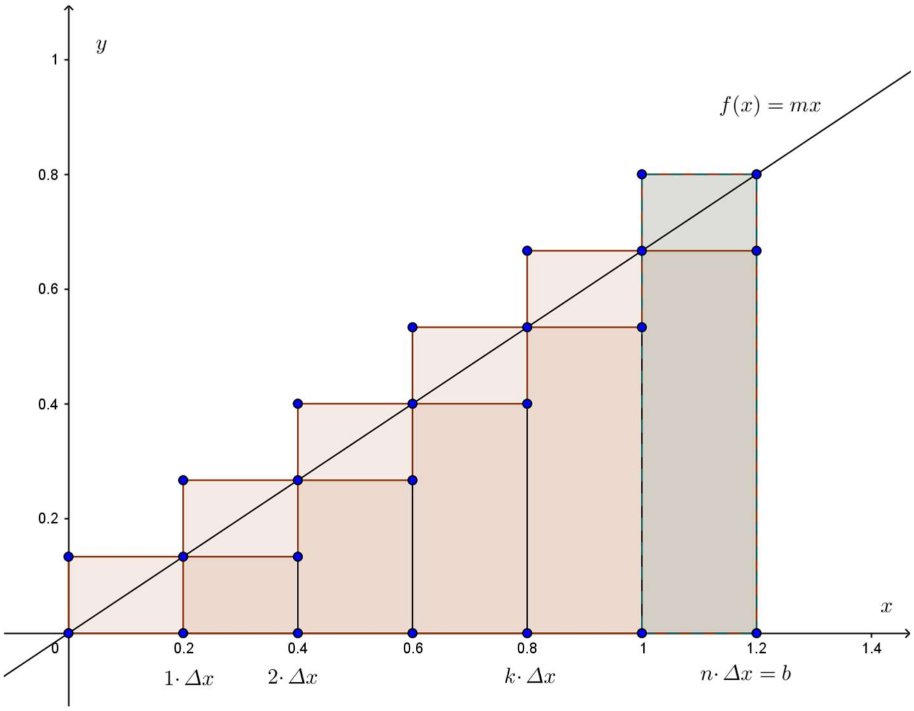
## 2. Definition des bestimmten Integrals

Die Idee des bestimmten Integrals wird anhand des folgenden Beispiels vorgestellt. Das Resultat ist allerdings bereits von vorne herein bekannt.

Beispiel:
Gesucht ist der Inhalt des von der Geraden $y = mx$, der x-Achse und der Geraden $x = b$ $(b > 0)$ eingeschlossenen Gebiets zu bestimmen.

Abbildung: $b = 1.2$, $m = \frac{2}{3}$, $n = 6$ und damit $\Delta x = 0.2$ (Einheit: 20 Häuschen).




Das Intervall [0, b] wird in n Teilintervalle der Breite $\Delta x = \dfrac{b}{n}$ unterteilt. Danach werden der Inhalt der äusseren Treppenfläche, die sogenannte n-te Obersumme $O_n$ bzw. der Inhalt der inneren Treppenfläche, die sogenannte n-te Untersumme $U_n$ berechnet.

$$O_n = m \cdot \Delta x \cdot (1 \cdot \Delta x + 2 \cdot \Delta x + ....... + n \cdot \Delta x)$$

$$= m \cdot (\Delta x)^2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + n) = m \cdot \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{mb^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Die n-te Unter- bzw. n-te Obersumme unterscheiden sich im Inhalt des in der Skizze grau gefärbten Rechtecks mit der Höhe m·b und der Breite Δx.

$$U_n = O_n - m \cdot b \cdot \frac{b}{n}$$

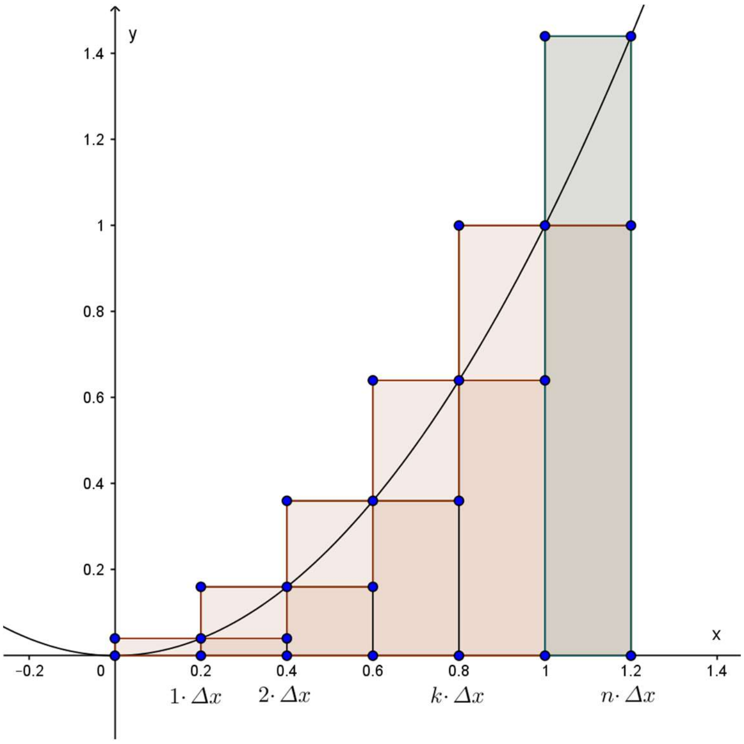
Die Unter- und Obersummen bilden eine sogenannte Intervallschachtelung.
Der Inhalt des betrachteten Dreiecks ist als gemeinsamer Grenzwert dieser Unter- bzw. Obersummen definiert.

$$A = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{mb^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{mb^2}{2} = \tfrac{1}{2} b \cdot mb$$

Der eben berechnete Grenzwert heisst ein bestimmtes Integral. Nach Leibniz schreibt man dafür:

$\int_0^b m\,x\,dx = \frac{m \cdot b^2}{2}$ „bestimmtes Integral über mx dx von 0 bis b“

Übungsaufgaben:
Es sind gemäss dem Beispiel für die folgenden Funktionen die Grenzwerte der Unter- und Obersummen zu bestimmen:
a) $f(x) = x^2$ ,  b) $f(x) = a\,x^3 \;\; a \in R$




$O_n = \Delta x \cdot ((1\cdot\Delta x)^2) + (2\cdot\Delta x)^2 + \cdots + (n\cdot\Delta x)^2)$
$\quad = (\Delta x)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$

Wegen

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ und $\Delta x = \frac{b}{n}$ gilt:

$$O_n = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n} =$$
$$= \frac{b^3}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

Für die n-te Untersumme gilt deshalb:

$$U_n = O_n - \frac{b^3}{n}$$

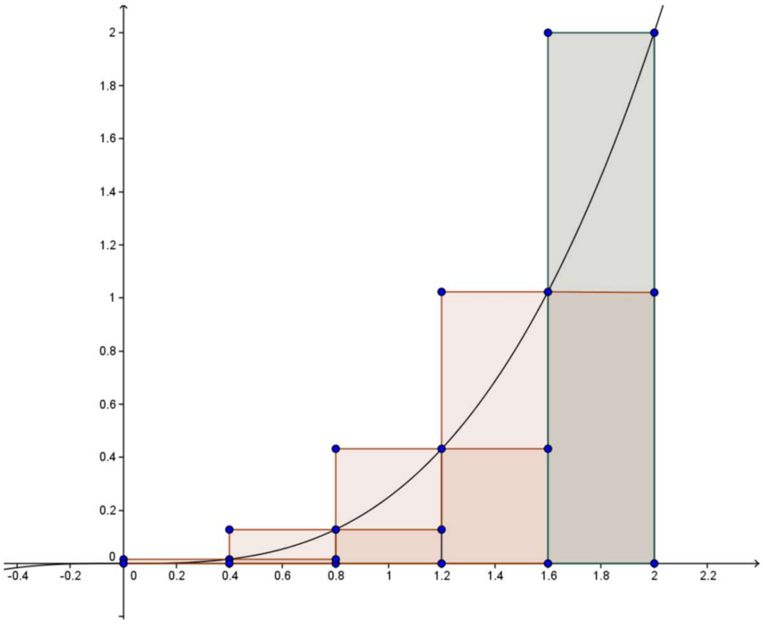
d.h. n-te Unter-bzw. Obersumme unterscheiden sich im Inhalt des in der Skizze grau gefärbten Rechtecks. Der Inhalt des betrachteten Flächenstücks ist als gemeinsamer Grenzwert dieser Unter- bzw. Obersummen definiert.

$$A = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{b^3}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{b^3}{3}$$

ein Drittel vom Inhalt des umbeschriebenen Rechtecks.
Nach Leibniz schreibt man für diesen eben berechneten Grenzwert

$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$ „bestimmtes Integral über $x^2 dx$ von 0 bis b“

b) $f(x) = ax^3$ Skizze b = 2, $a = \frac{1}{4}$, n = 5 und damit Δx = 0.4



Bei der Herleitung wird eine Formel für die Summe der Kubikzahlen benötigt, die man durch induktives Schliessen finden kann (Beweis mit vollständiger Induktion).

$1^3 = 1^2$
$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

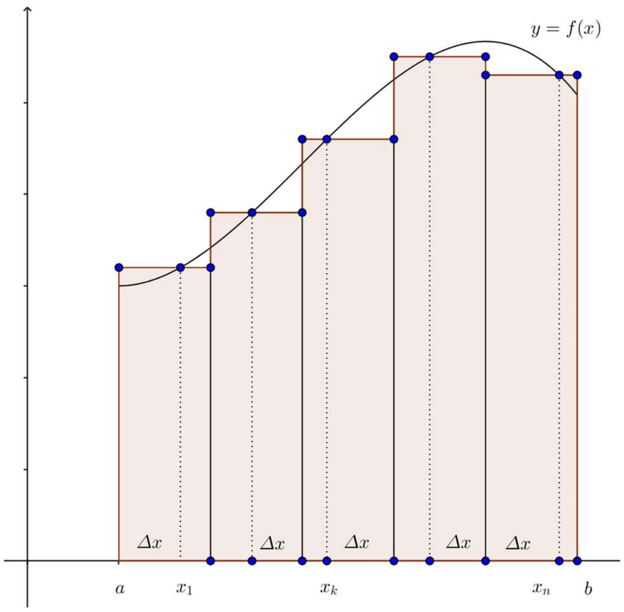
$$A = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{b^4}{4}$$

Ergebnis: $\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$

Allgemeiner Fall:

Die Funktion f sei im Intervall [a, b] stückweise stetig.

Die bisherigen Beispiele weisen darauf hin, dass das bestimmte Integral nicht davon abhängt, ob man in den Teilintervallen den kleinsten (für die Untersummen) oder den grössten Funktionswert (für die Obersummen) wählt. Für die Definition des bestimmten Integrals betrachtet man deshalb etwas allgemeiner Zwischensummen statt der Unter- bzw. Obersummen.




1.
Das Intervall in n Teilintervalle der Breite Δx geteilt.
2.
In jedem Teilintervall wird eine Zwischenstelle $x_k$ gewählt. Diese Zwischenstellen legen in jedem Teilintervall die Höhe $f(x_k)$ des Rechtecks fest.
3.
Es werden die sogenannten Riemannschen Summen gebildet

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + .... + f(x_n)\cdot\Delta x\,.$$

Die Riemannschen Summen können - falls f(x) nichtnegativ ist - als Näherungswert für den gesuchten Flächeninhalt aufgefasst werden.

Es kann bewiesen werden, dass der Grenzwert der Riemannschen Summen für n gegen unendlich eindeutig bestimmt ist (unabhängig von der Wahl der Zwischenstellen $x_k$), sofern f im Intervall $[a, b]$ stückweise stetig ist.
Dieser eindeutig bestimmte Grenzwert heisst bestimmtes Integral der Funktion f im Intervall $[a, b]$ und wird nach Leibniz mit $\int_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet.

Definition:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

Kurz: bestimmte Integrale sind als Grenzwerte der Riemannschen Summen definiert (bzw. als der gemeinsame Grenzwert der Unter- bzw. Obersummen).

Bemerkungen:
Für nichtnegative f gibt der Wert des bestimmten Integrals den Inhalt des von der Kurve und der x-Achse im Intervall $[a, b]$ eingeschlossenen Flächenstücks an.

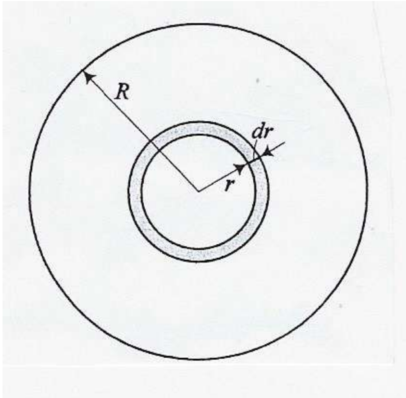
Der Name der Integrationsvariablen kann durch einen beliebigen anderen Namen ersetzt werden, ohne dass sich der Wert des Integrals ändert:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz$$

Die Anwendung der Idee des bestimmten Integrals als Grenzwert der Riemannschen Summen führt z. B. zu den Aussagen:

Kreisfläche:
Flächenelement:
$dA = 2\pi \cdot r \cdot dr$

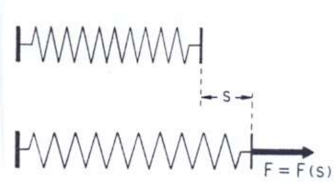
$$A = \int_0^R dA = \int_0^R 2\pi r dr$$




oder in der Physik:

Fahrtenschreiber: $$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

mechanische Arbeit: $$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\,ds$$




Allgemein ermöglicht die Integralrechnung den Schluss von Änderungen eines Verlaufs auf den Gesamtverlauf.

Die Beispiele zeigen aber auch, wie mühsam die Berechnung bestimmter Integrale nach Definition als gemeinsamer Grenzwert der Ober- bzw. Untersummen ist, denn es treten u.U. komplizierte Summen auf. Wir suchen deshalb einen anderen Weg, um bestimmte Integrale zu berechnen.