4. Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Hauptsatz (1. Form)

Für jede im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion f ist die Integralfunktion mit

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

differenzierbar und es gilt:

$F_a'(x) = f(x)$ für $x \in [a, b]$

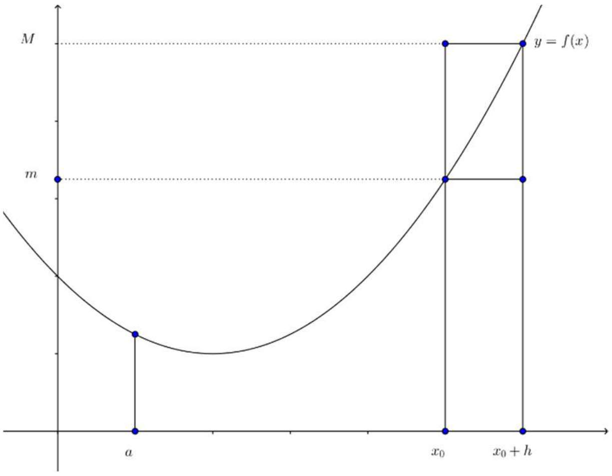
das heisst: Die Integralfunktion F_a ist eine Stammfunktion von f oder

$$\left(\int_a^x f(t)\, dt \right)' = f(x)$$

I. Newton (1642-1727)

G.F. Leibniz (1646-1716)

Beweis des Hauptsatzes unter der zusätzlichen Voraussetzung: f(x) ≥ 0



Sei m das Minimum, M das Maximum der stetigen Funktion f im Intervall $[x_0,\ x_0 + h]$.

Für die Integralfunktion $F_a(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)dt)$ gilt dann die folgende Abschätzung:

$mh \le F_a(x_0 + h) - F_a(x_0) \le Mh$	Division durch h ≠ 0
$m \le \dfrac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} \le M$	Grenzübergang
$\lim\limits_{h \to 0} m \le \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} \le \lim\limits_{h \to 0} M$	f ist stetig
$f(x_0) \le F_a'(x_0) \le f(x_0)$	
$F_a'(x_0) = f(x_0)$	F_a ist eine Stammfunktion von f auf $[a, b]$

Das Problem der Differentialrechnung: (Ableiten, Derivation)
Gegeben ist eine Funktion F, gesucht ist die 1.Ableitung $F' = f$

Die Integralrechnung ("Aufleiten", Antiderivation)ist das Umkehrproblem der Differentialrechnung:
Gegeben ist eine Funktion f, gesucht ist eine Funktion F mit $F' = f$

Mit dem Hauptsatz in der 1. Form ergibt sich nun ein einfaches Verfahren zur Berechnung bestimmter Integrale. Die Idee wird zunächst am folgenden Beispiel erläutert:

Ist etwa $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ zu berechnen, so betrachte man die zugehörige Integralfunktion

$F_0(x) = \int_0^x \sin x\, dx$.

$F(x) = -\cos x$ ist eine Stammfunktion des Integranden.

F_0 ist nach dem Hauptsatz (1. Form) eine Stammfunktion von f, F_0 unterscheidet sich also von einer beliebigen Stammfunktion F des Integranden f höchstens in einer Konstanten, d.h. es gilt:

$F_0(x) = -\cos x + c$ mit $c \in R$.

Die Konstante c ist dadurch bestimmt dass an der unteren Grenze $F_0(0) = 0$ ist:

$F_0(0) = -\cos 0 + c$ und damit $c = cos\ 0 = 1$.

Wegen $F_0(x) = -\cos x + 1$ folgt

$F_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Überträgt man das Vorgehen auf den allgemeinen Fall so erhält man den

Hauptsatz (2. Form)

Ist F eine Stammfunktion der im Intervall $[a, b]$ stetigen Funktion f, dann gilt:

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Die Berechnung von bestimmten Integralen besteht damit aus zwei Schritten:

1. Es ist zum Integranden f eine beliebige Stammfunktion F zu suchen.
2. Es ist die Differenz der Funktionswerte von F an oberer und unterer Grenz zu bilden.

Beweis des Hauptsatzes (2.Form)

Die Integralfunktion $F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ ist eine Stammfunktion von f. Sie unterscheidet sich von einer beliebigen Stammfunktion F von f höchstens in einer Konstanten c, d.h. es gilt:

$F_a(x) = F(x) + c$

Da F_a an der unteren Grenze a verschwindet gilt:

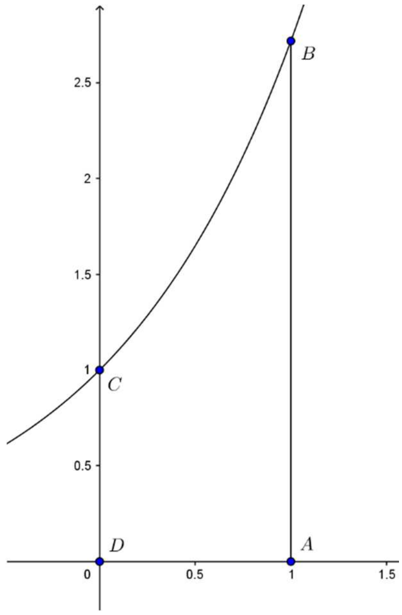
$F_a(a) = F(a) + c = 0$ und damit $c = -F(a)$ oder also $F_a(x) = F(x) - F(a)$

An der oberen Grenze $x = b$ erhält man schliesslich

$F_a(b) = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$ □

Bemerkungen:
Für Differenz F(b) - F(a) schreibt man zur Abkürzung $F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$

Die Stammfunktion kann durch eine beliebige andere Stammfunktion ersetzt werden, denn eine allfällige Konstante wird an der oberen Grenze addiert und an der unteren wieder subtrahiert.



Beispiele:

$$\int_0^1 e^x dx = ?$$

$F(x) = e^x$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = e^x$

$$\int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

Das von den Punkten ABCD begrenzte Gebiet hat also den Inhalt $e - 1$.

Bemerkung:
Nicht jedes bestimmte Integral muss mit dem Hauptsatz berechnet werden. Eine geometrische Interpretation kann allenfalls wie im folgenden Beispiel die Berechnung vereinfachen:

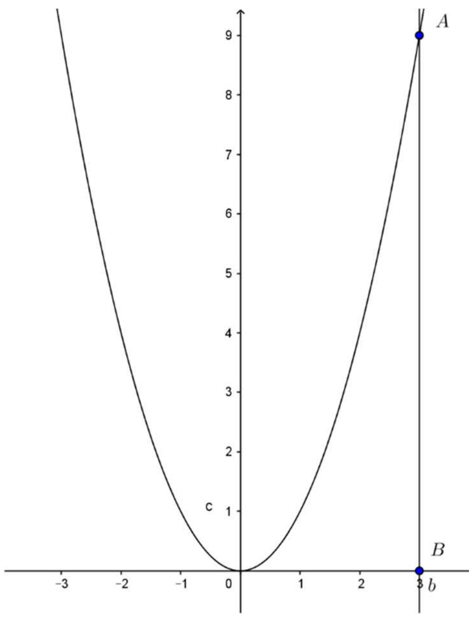
$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi r^2}{4}$$ Inhalt eines Viertelkreises mit Radius r

Etwa bei linearen Integranden ist die Berechnung von bestimmten Integralen u.U. nicht zweckmässig.

Aufgabe:
Bestimme b > 0 so, dass die Fläche zwischen y = x^2, der x-Achse und der Geraden x = b den Inhalt 9 hat.

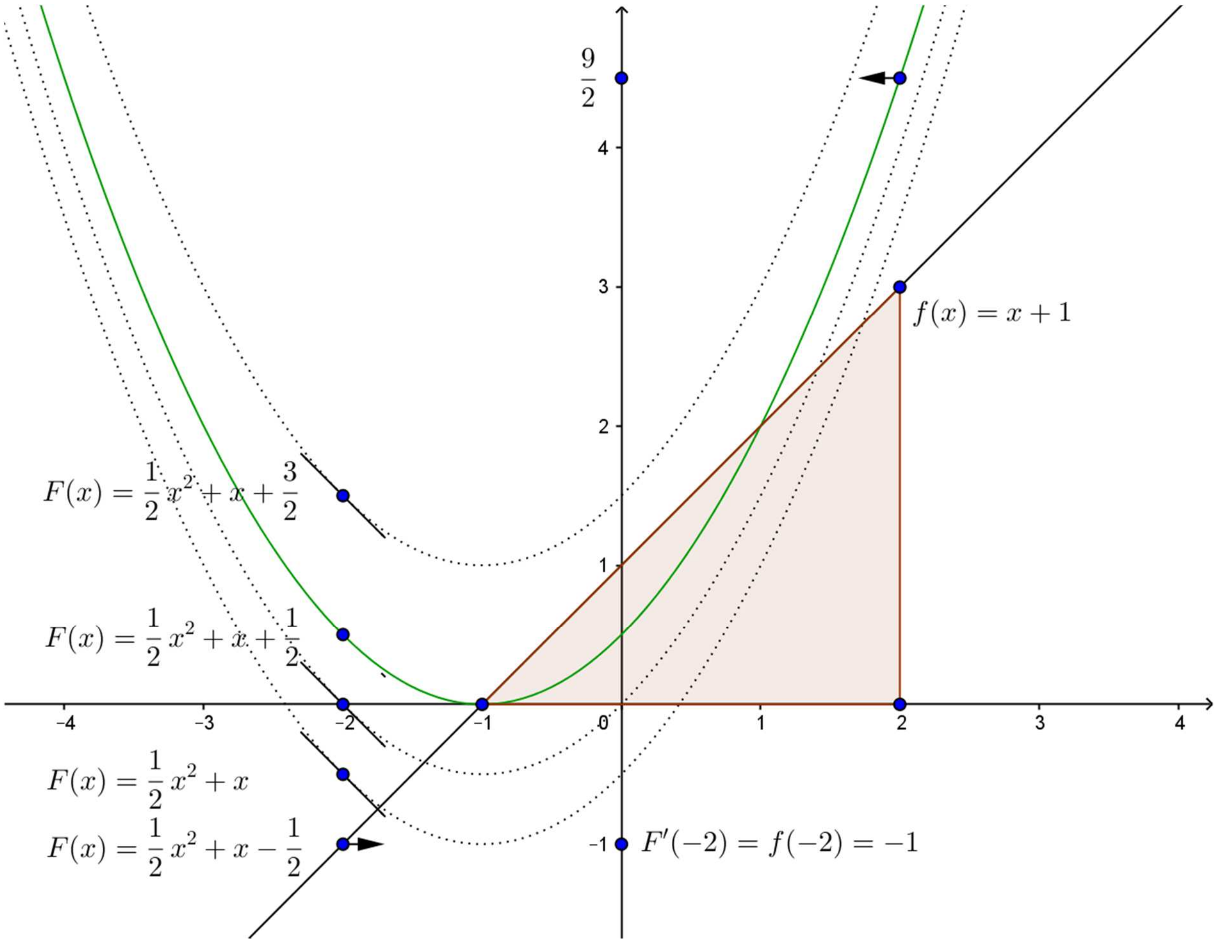
$$\int_0^b x^2\, dx = \tfrac{1}{3} x^3\Big|_0^b = \tfrac{1}{3} b^3 = 9$$

$b = 3$



Ergänzungen:

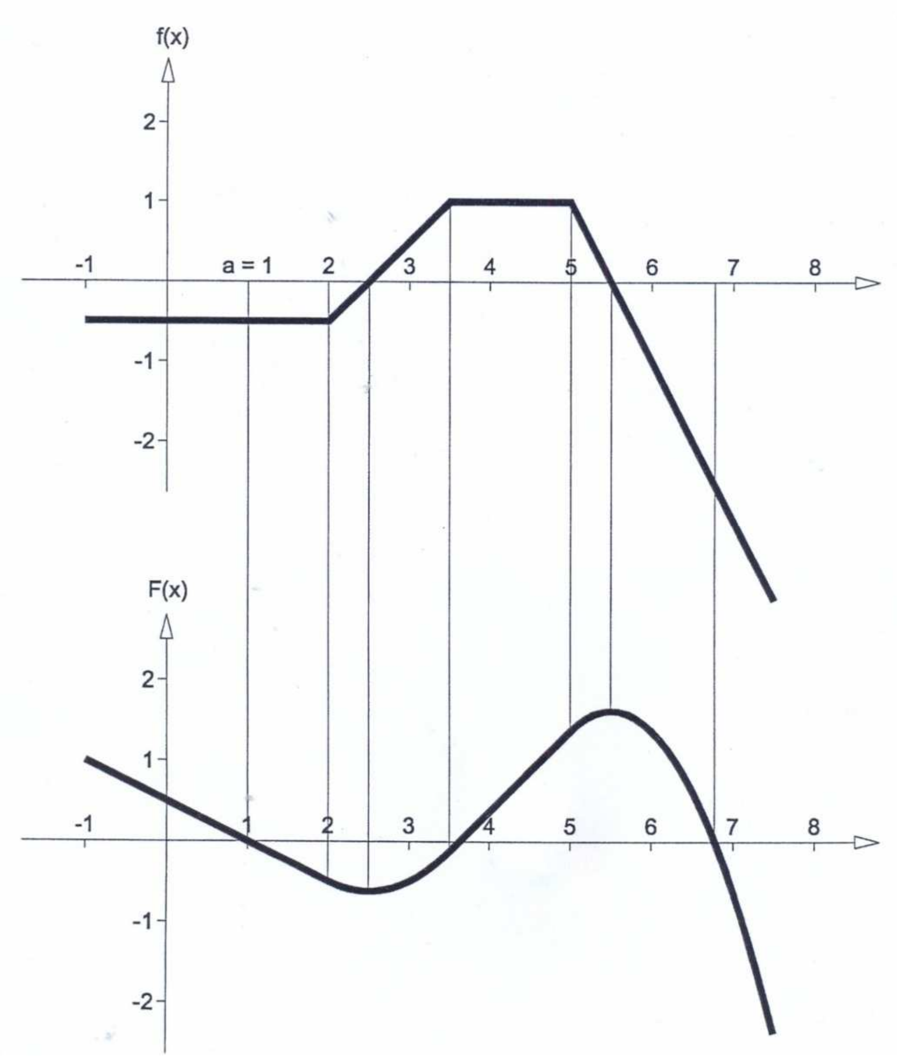
1.
Die Aussage des Hauptsatzes in der 1. Form kann am folgenden einfachen Beispiel illustriert werden:



Die Aufgabe das bestimmte Integral $\int_{-1}^{2} (x+1)\,dx$ zu berechnen (geometrisch: Inhalt des gefärbten Dreiecks) kann nach dem Hauptsatz folgendermassen gelöst werden:
Zunächst ist zum Integranden f eine Stammfunktion F zu suchen:
In der Skizze sind dazu 4 verschiedene Stammfunktionen von f dargestellt. Da ihre Ableitungen übereinstimmen, haben ihre Graphen gleiche Tangentensteigungen, dargestellt an der Stelle -2, wo die Ableitung $f(-2) = -1$ beträgt. Massgebend ist nun die Stammfunktion, die an der unteren Grenze (-1) den Wert 0 hat, also $F_{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$. Der Wert des bestimmten Integrals stimmt mit $F_{-1}(2) = \frac{9}{2}$ überein.
Nach der 2. Form des Hauptsatzes kann der Wert des bestimmten Integrals auch berechnet werden, indem man für eine beliebige Stammfunktion F z.B. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ die Differenz der Funktionswerte $F(2) - F(-1) = 4 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}$ bestimmt („Flächenzuwachs").

Bemerkung:
Da $f(-1) = 0$ haben die Parabeln als Graphen der Stammfunktionen den Scheitel an der Stelle -1.

2.
Der Hauptsatz bedeutet auch, dass durch Integration aus stetigen Funktion differenzierbare Funktionen entstehen. Integration hat also - wie das folgende Beispiel zeigt - eine glättende Wirkung.



ac