4. Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Hauptsatz (1. Form) I. Newton (1642-1727), G.F. Leibniz (1646-1716)

Für jede im Intervall [a,b] stetige Funktion f sei

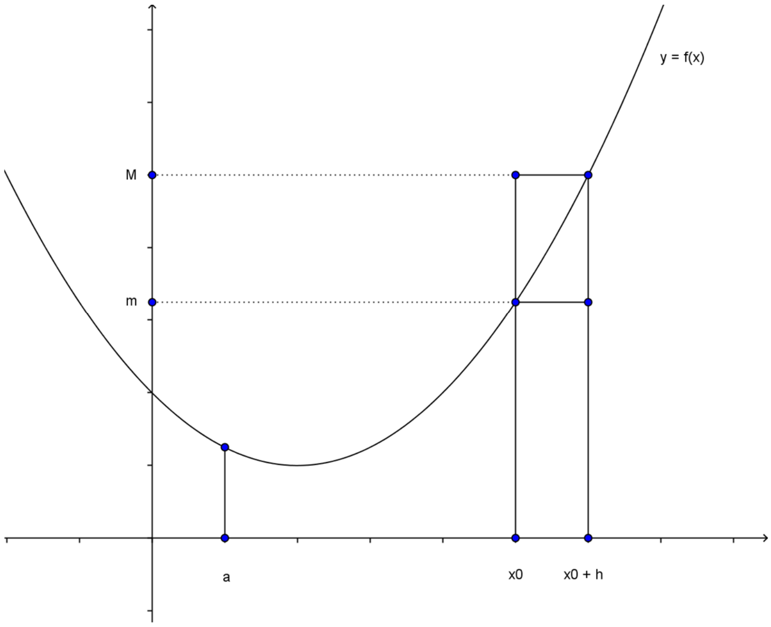
$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ sogenannte Integralfunktion

dann gilt:

Die Integralfunktion F_a ist eine Stammfunktion von f d.h. es gilt:

$F_a'(x) = f(x)$ für $x \in [a,b]$ oder

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt \right)' = f(x)$$



Beweis des Hauptsatzes unter der zusätzlichen Voraussetzung: $f(x) \geq 0$

Sei m das Minimum, M das Maximum der stetigen Funktion f im Intervall $[x_0, x_0 + h]$

Für die Integralfunktion $F_a(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)dt$ gilt dann die folgende Abschätzung:

$mh \leq F_a(x_0 + h) - F_a(x_0) \leq Mh$ — Division durch $h \neq 0$

$m \leq \dfrac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} \leq M$ — Grenzübergang

$\lim\limits_{h \to 0} m \leq \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} \leq \lim\limits_{h \to 0} M$ — f ist stetig

$f(x_0) \leq F_a'(x_0) \leq f(x_0)$

$F_a'(x_0) = f(x_0)$ — F_a ist eine Stammfunktion von f auf [a,b]

Das Problem der Differentialrechnung: (Ableiten, Derivation)
Gegeben ist eine Funktion F, gesucht ist die 1.Ableitung F' = f

Das Umkehrproblem der Integralrechnung: ("Aufleiten", Antiderivation)
Gegeben ist eine Funktion f, gesucht ist eine Funktion F mit F' = f

Als Folgerung aus dem Hauptsatz in der 1. Form ergibt sich nun ein einfaches Verfahren zur Berechnung bestimmter Integrale. Die Idee wird am folgenden Beispiel erläutert:

Ist etwa $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ zu berechnen, so betrachte man die zugehörige Integralfunktion

$F_0(x) = \int_0^x \sin x\, dx$

$F(x) = -\cos x$ ist eine Stammfunktion des Integranden $f(x) = \sin x$

F_0 ist nach dem Hauptsatz (1. Form) eine Stammfunktion von f, F_0 unterscheidet sich also von einer beliebigen Stammfunktion F des Integranden f höchstens in einer Konstanten, d.h. es gilt:

$F_0(x) = -\cos x + c$ mit c ∈ R

Die Konstante c ist dadurch bestimmt dass $F_0(0) = 0$ ist:

$F_0(0) = -\cos 0 + c$ und damit c = cos 0 = 1

Wegen $F_0(x) = -\cos x + 1$ folgt

$F_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

überträgt man das Vorgehen auf den allgemeinen Fall so erhält man den

Hauptsatz (2. Form)

Ist F eine Stammfunktion der im Intervall [a,b] stetigen Funktion f, dann gilt:

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Die Berechnung von bestimmten Integralen besteht damit aus zwei Schritten:
1. Suche zum Integranden f eine beliebige Stammfunktion F
2. Bilde die Differenzen der Funktionswerte von F an oberer und unterer Grenze.

Beweis des Hauptsatzes (2.Form)

Die Integralfunktion $F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ ist eine Stammfunktion von f. Sie unterscheidet sich von einer beliebigen Stammfunktion F von f höchstens in einer Konstanten c, d.h. es gilt:

$F_a(x) = F(x) + c$

Da F_a an der unteren Grenze a verschwindet gilt:

$F_a(a) = F(a) + c = 0$ $\qquad c = -F(a)$ oder also $F_a(x) = F(x) - F(a)$

Für x = b erhält man schliesslich

$F_a(b) = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$

Damit ist der Hauptsatz bewiesen.

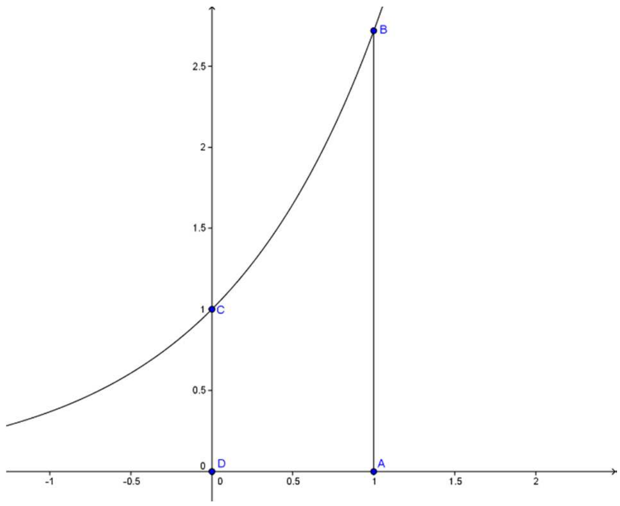
Bem.: Für Differenz F(b) - F(a) schreibt man zur Abkürzung

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Bem.:
Die Stammfunktion kann durch eine beliebige andere Stammfunktion ersetzt werden, denn eine allfällige Konstante wird an der obern Grenze addiert und an der untern wieder subtrahiert.

Beispiele:

$$\int_0^1 e^x\,dx = ?$$



F(x) = e^x ist eine Stammfunktion von f(x) = e^x

$$\int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

Bem.:
Nicht jedes bestimmte Integral muss mit dem Hauptsatz berechnet werden. Eine geometrische Interpretation kann die Berechnung vereinfachen wie im folgenden Beispiel:

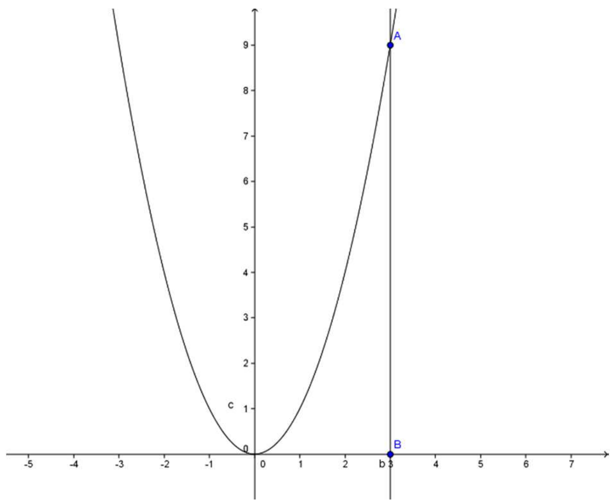
$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi r^2}{4}$$ Inhalt eines Viertelskreises mit Radius r

vgl. auch in Abschnitt 3. das einführende Beispiel eines linearen Integranden.

Aufgabe:
Bestimme b > 0 so, dass die Fläche zwischen y = x^2, der x-Achse und der Geraden x = b den Inhalt 9 hat.

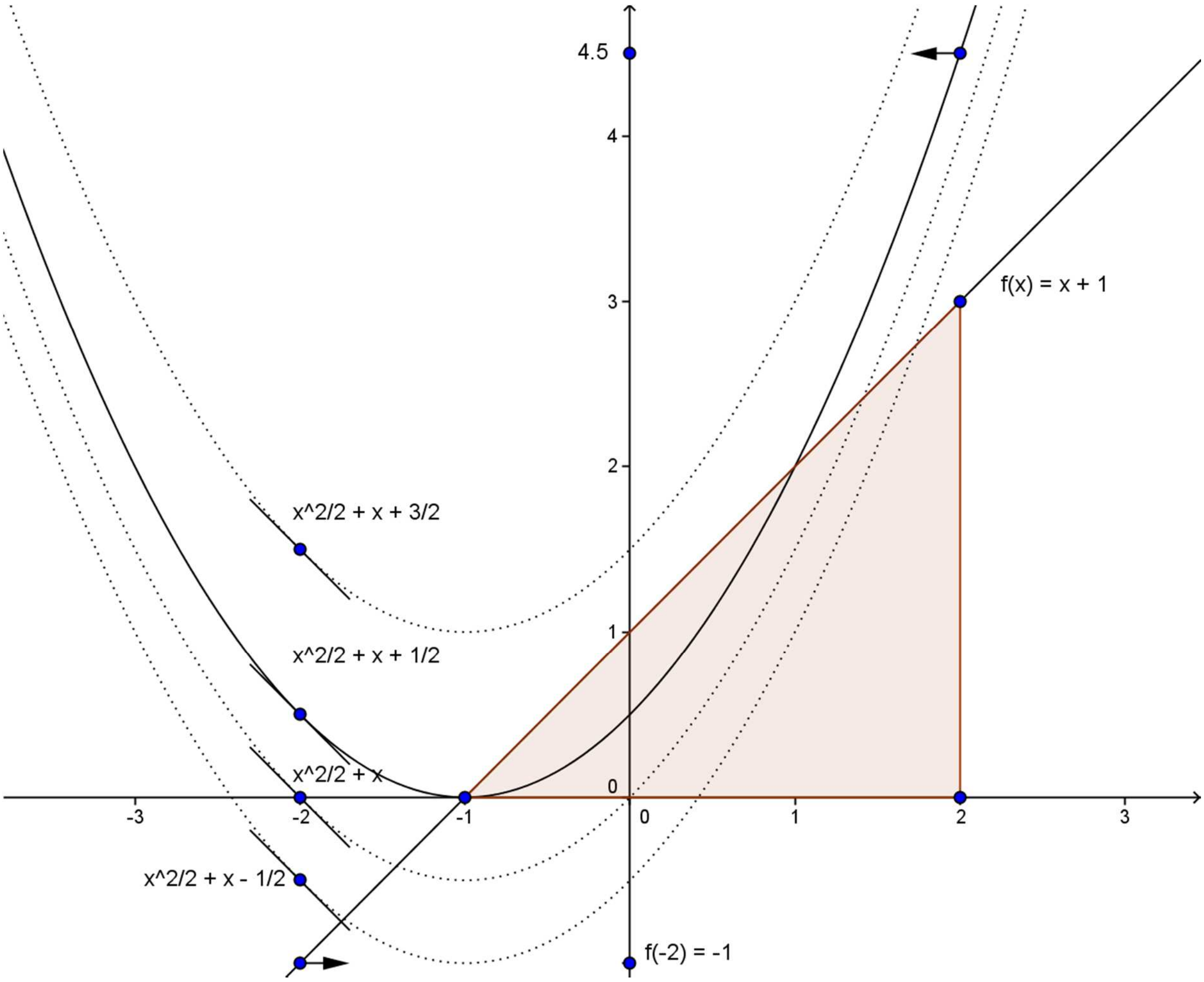
$$\int_0^b x^2\,dx = \tfrac{1}{3}x^3\Big|_0^b = \tfrac{1}{3}b^3 = 9$$

b = 3



Ergänzungen:

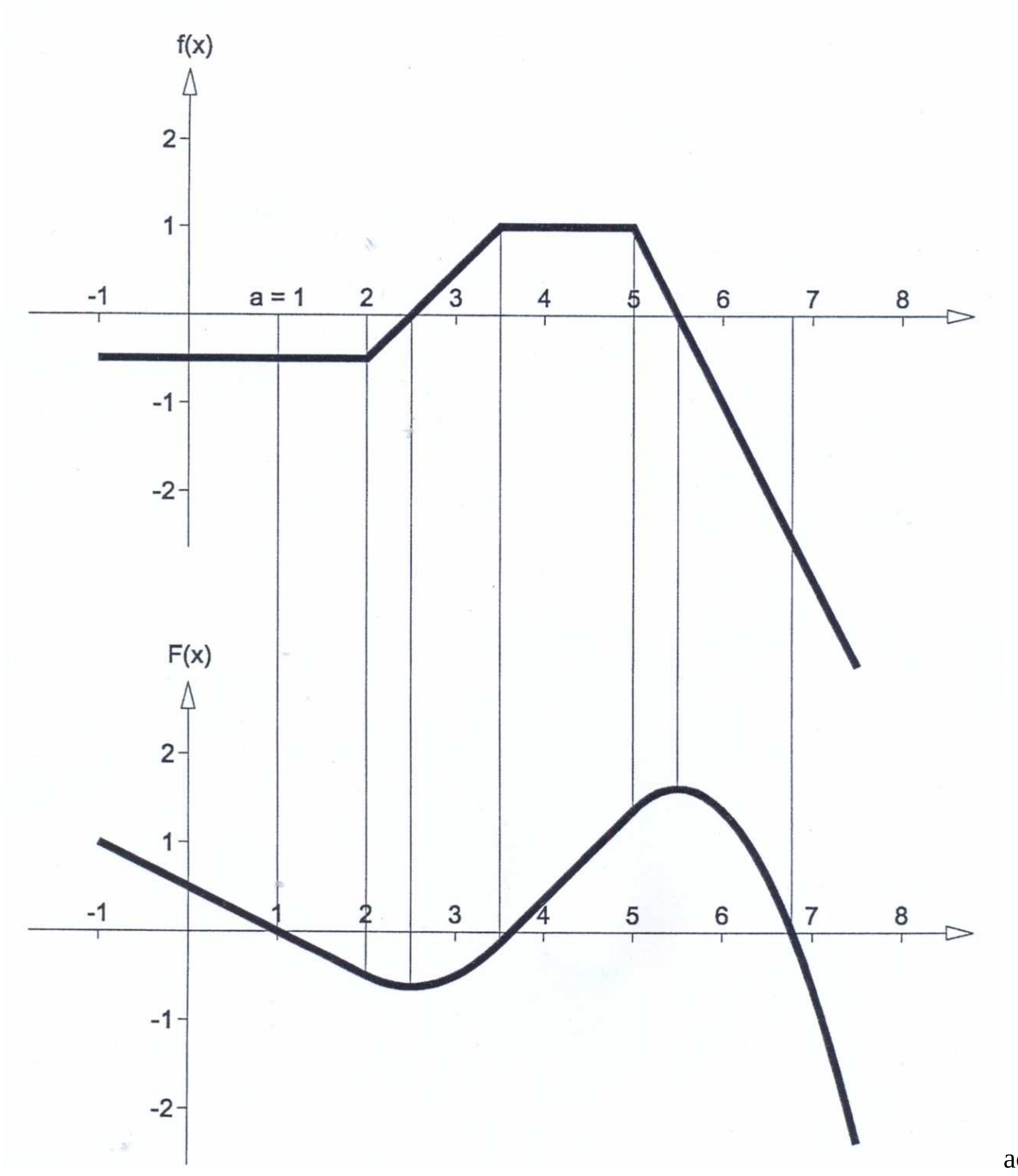
1.
Die Aussage des Hauptsatzes in der 1. Form kann am folgenden einfachen Beispiel illustriert werden:



Die Aufgabe das bestimmte Integral $\int_{-1}^{2}(x+1)\,dx$ zu berechnen (geometrisch: den Inhalt des gefärbten Dreiecks zu berechnen) kann nach dem Hauptsatz folgendermassen gelöst werden:
Zunächst ist zum Integranden f eine Stammfunktion zu suchen:
In der Skizze sind dazu 4 verschiedene Stammfunktionen von f dargestellt. Da ihre Ableitungen übereinstimmen haben ihre Graphen gleiche Tangentensteigungen, dargestellt an der Stelle -2, wo die Ableitung f(-2) = - 1 beträgt. Massgebend ist nun die Stammfunktion, die an der unteren Grenze (-1) den Wert 0 hat, also $F_{-1}(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$. Der Wert des bestimmten Integrals stimmt mit $F_{-1}(2)=\frac{9}{2}$ überein.
Nach der 2. Form des Hauptsatzes kann der Wert des bestimmten Integrals auch berechnet werden, indem man für eine beliebige Stammfunktion F z.B. $F(x)=\frac{1}{2}x^2+x$ die Differenz der Funktionswerte F(2) – F(-1) = 4 – ($-^1/_2$) = $^9/_2$ (den „Flächenzuwachs“ berechnet).

Bem.:
Da (zufälligerweise) f(-1) = 0 haben die Parabeln als Graphen der Stammfunktionen den Scheitel an der Stelle -1

2.
Der Hauptsatz bedeutet auch, dass durch Integration aus stetigen Funktion differenzierbare Funktionen entstehen. Integration hat also wie das folgende Beispiel zeigt eine glättende Wirkung.



ac