7. Bestimmtes Integral und Flächeninhalt

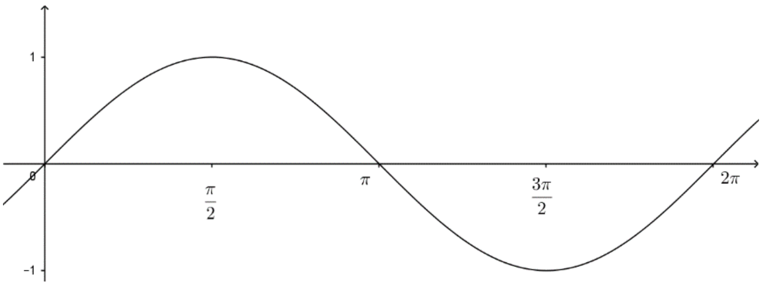
In diesem Abschnitt soll der Zusammenhang zwischen dem bestimmten Integral und dem Flächeninhalt untersucht werden.

In diesem einführenden Beispiel sind die folgenden bestimmten Integrale zu berechnen:

(1) $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = \cos x\Big|_{\pi}^{0} = 2$

(2) $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = \cos x\Big|_{2\pi}^{\pi} = -2$

(3) $\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = \cos x\Big|_{2\pi}^{0} = 0$



Satz:
1
Ist in einem Intervall der Integrand nicht negativ, so gibt das bestimmte Integral den Inhalt des von der Kurve $y = f(x)$, der x-Achse und den Parallelen $x = a$ bzw. $x = b$ eingeschlossenen Flächenstücks an. vgl. (1)
2
Ist in einem Intervall der Integrand negativ, so gibt das bestimmte Integral den mit dem Faktor (-1) multiplizierten Flächeninhalt an. vgl. (2)
3
Hat ein bestimmtes Integral den Wert 0, so bedeutet dies, dass die oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse gelegenen Flächenstücke denselben Inhalt haben.

Der Satz folgt aus der Definition des bestimmten Integrals. Im Falle (2) ist jeder Summand $f(x_k)\cdot\Delta x$ negativ.

Aufgabe:
Die folgenden bestimmten Integrale sind mit geometrischen Überlegungen zu berechnen.

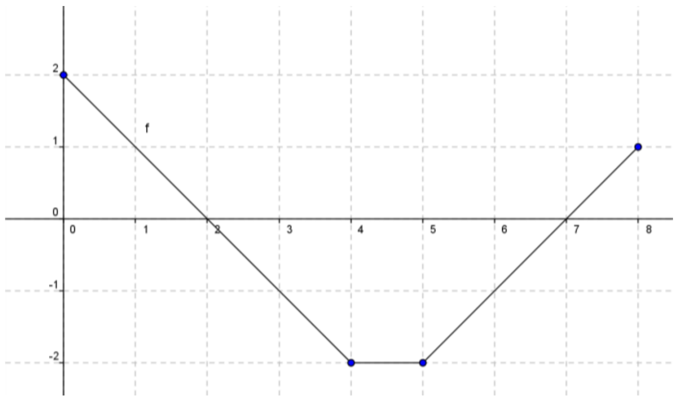
a) $\int_0^{2} f(x)\,dx = 2$ Dreiecksinhalt 2

b) $\int_2^{7} f(x)\,dx = -6$ Trapezinhalt 6

c) $\int_0^{7} f(x)\,dx = 2-6 = -4$

d) $\int_0^{8} f(x)\,dx = 2-6+\frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$

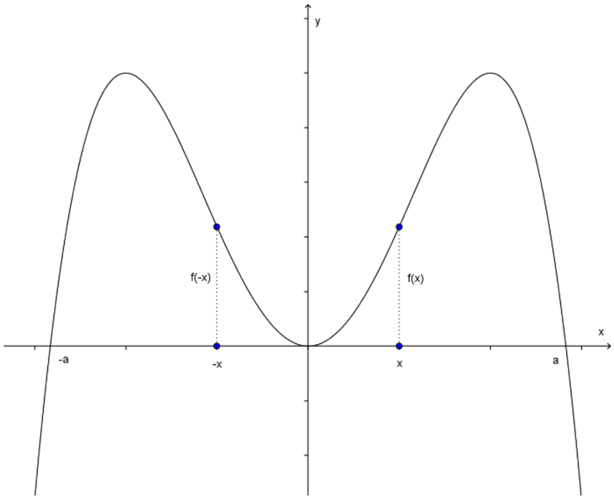
e) $\int_1^4 |f(x)|dx = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$



Für ergeben sich Bei der Berechnung von bestimmten Integralen ergeben sich für symmetrische Graphen folgende Vereinfachungen:

Es sei G_f axialsymmetrisch zur y-Achse d.h. es gilt $f(-x) = f(x)$ im Intervall $[-a, a]$

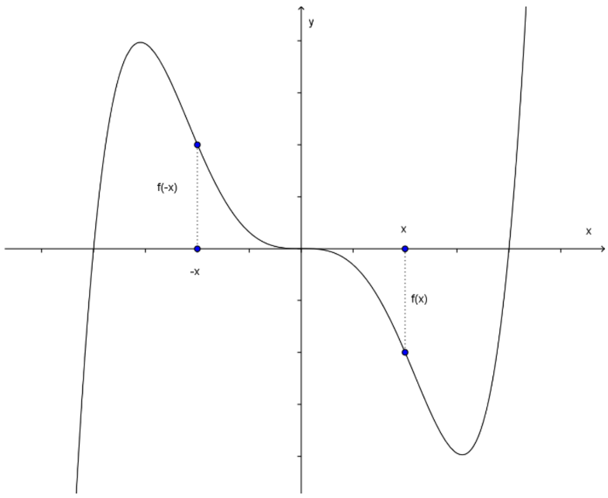
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$



Es sei G_f zentralsymmetrisch zum Nullpunkt d.h. es gilt $f(-x) = f(x)$ im Intervall $[-a, a]$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse liegende Gebiete haben den gleichen Inhalt.



Beispiele:

$$\int_{-2}^{2} \left(2x + 3x^2 - x^3\right) dx = \int_{-2}^{2} \left(2x - x^3\right) dx + \int_{-2}^{2} 3x^2 dx = 0 + 2 \cdot \int_{0}^{2} 3x^2 dx = 2 \cdot x^3\Big|_0^2 = 16$$

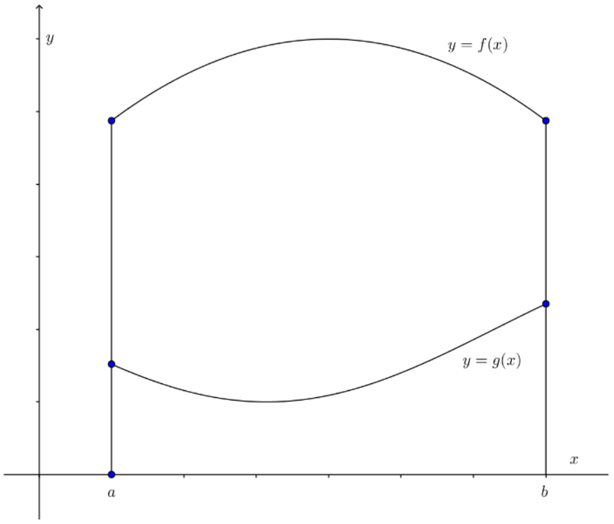
Der Integrand wird in zwei Summanden zerlegt. Der Graph des 1. Summanden ist zentralsymmetrisch, der des 2. axialsymmetrisch.

Why ist $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{1} x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Bigg|_{-1}^{1} = x^{-1}\Big|_{1}^{-1} = -2$ obviously wrong?

Die Stelle x = 0 ist eine Polstelle. Deshalb ist das bestimmte Integral nicht definiert.

8. Flächen zwischen zwei Kurven

Die Kurven $y = f(x)$ bzw. $y = g(x)$ und die Parallelen $x = a$ und $x = b$ begrenzen ein Flächenstück, dessen Inhalt I zu berechnen ist.



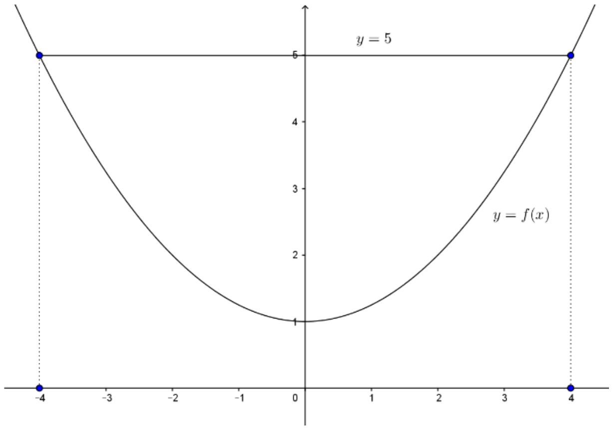
Zusätzliche Voraussetzung:
Im Intervall $[a, b]$ sei $f(x) \geq g(x) \geq 0$

Für den gesuchten Flächeninhalt I gilt:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

Bemerkung:
Der Term nach dem Integralzeichen kann als Inhalt eines infinitesimalen Rechtecks der Höhe f(x) – g(x) und der Breite dx aufgefasst werden.

Aufgabe:
Welchen Inhalt I hat die von der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ und der Parallelen zur x-Achse mit der Gleichung $y = 5$ begrenzte Fläche?



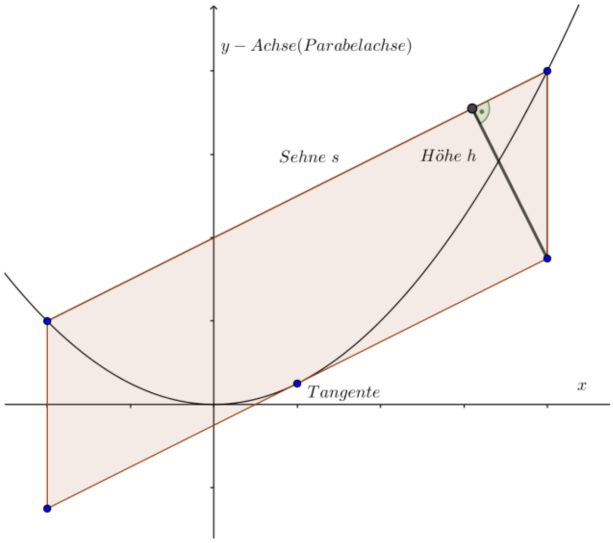
Schnittpunkte:

$$\tfrac{1}{4}x^2 + 1 = 5 \qquad \tfrac{1}{4}x^2 = 4 \qquad x_{1,2} = \pm 4$$

$$I = \int_{-4}^{4} \left(5 - \left(\tfrac{1}{4}x^2 + 1\right)\right) dx = 2 \cdot \int_0^4 \left(4 - \tfrac{1}{4}x^2\right) dx$$

$$= 2 \cdot \left(4x - \frac{x^3}{12} \right)\Bigg|_0^4 = 2 \cdot \left(16 - \tfrac{64}{12}\right) = \tfrac{64}{3} = \tfrac{2}{3} \cdot 8 \cdot 4$$

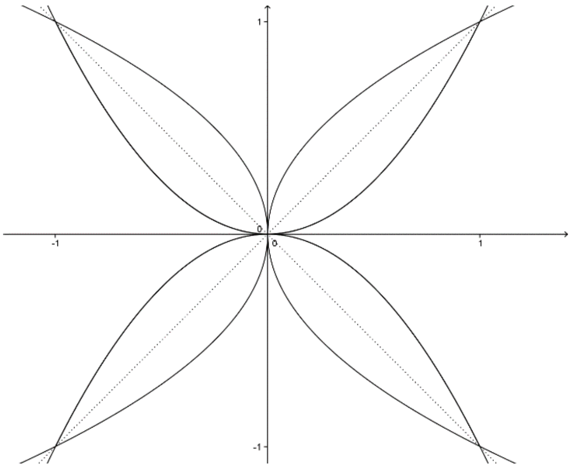
Bemerkung:
Die Lösung wird vereinfacht, wenn die Symmetrie beachtet wird.
Das Ergebnis ist ein Spezialfall des folgenden Satzes, der auf Archimedes zurückgeht:



> Satz:
> Die Fläche eines Parabelsegments ist gleich zwei Drittel der Fläche des dem Segment umbeschriebenen Parallelogramms. (archimedische Formel)
> $A = \frac{2}{3}sh$

Bei den folgenden Aufgaben ist der Inhalt I der eingeschlossenen Flächen gesucht:

1.
Das "vierblättrige" Kleeblatt.



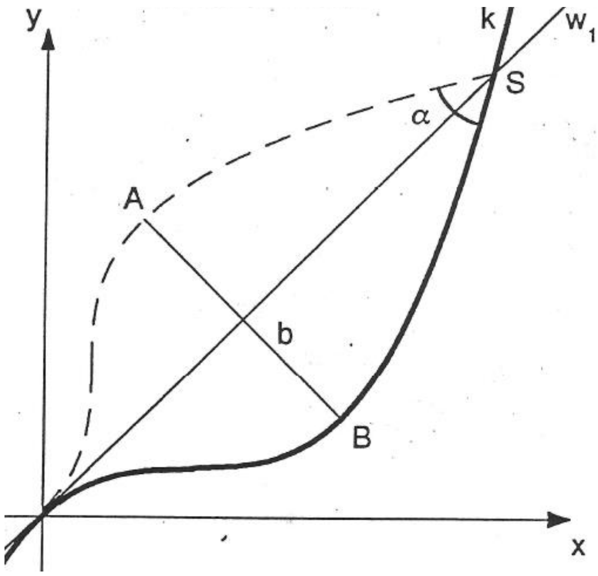
Berechne Zunächst kann der Inhalt I_1 des von der 1. Winkelhalbierenden y = x und der Parabel y = x^2 im 1. Quadranten begrenzten Flächenstücks bestimmt werden. I ist achtmal so gross.

$$I = 8I_1 = 8\int_0^1 \left(x - x^2\right)dx = 8\left(\tfrac{1}{2} - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1\right) = 8 \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{4}{3}$$

Das Integral $\int_0^1 x dx = \tfrac{1}{2}$ kann elementar berechnet werden (halbes Einheitsquadrat!)

Zusatzfrage:
Winkel bei der Blattspitze? (36.8°)

2. (ac)
Die Kurve k: $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$
bildet zusammen mit ihrem Spiegelbild
an der 1. Winkelhalbierenden w_1: $y = x$
eine blattförmige Figur mit der Spitze S und
der grössten Blattbreite AB
Gesucht sind
a) die Blattspitze S und der Winkel α bei S
b) die Blattbreite b
c) der Inhalt der Blattfläche



a)
Aus der Gleichung
$\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x = x$ folgt
$\frac{1}{3}x^2 \cdot (x - 3) = 0$ mit den Lösungen
$x_{1,2} = 0$ und $x_3 = 3$ und damit S(3, 3).
Mit $f'(x) = x^2 - 2x + 1$ folgt $f'(3) = 4 = tan(\varphi)$
und daraus $\alpha = 2 \cdot (\varphi - 45°) \approx 61.9°$
b)
In B ist die Tangente parallel zu w_1. Damit gilt:
$f'^{(x)} = x^2 - 2x + 1 = 1$ mit den Lösungen $x_3 = 0$ und $x_2 = 2$
Die Koordinaten von A und B ergeben sich zu $B(2,\ \frac{2}{3})$ und für den gespiegelten Punkt $A(\frac{2}{3}, 2)$ Für die Blattbreite ergibt sich aus der Abstandsformel $\overline{AB} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$.
c)
Wegen der Axialsymmetrie ergibt sich die Fläche zu

$$I = 2 \cdot \left(\int_0^3 x - \left(\tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right)dx\right) = 2 \cdot \left(\int_0^3 \left(-\tfrac{1}{3}x^3 + x^2\right)dx\right) = 2 \cdot \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

Der eingangs erwähnte Satz:

$$I=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

gilt auch, wenn die betrachtete Fläche teilweise unterhalb der x-Achse liegt:

Beweis:
Das Flächenstück kann so um c Einheiten in y-Richtung verschoben werden, dass es ganz oberhalb der x-Achse zu liegen kommt. Die Gleichungen der verschobenen Kurven heissen nun:
$y=f(x)+c$ bzw. $y=g(x)+c$ mit geeignet gewähltem c. Bei der Integration der Differenz fällt die Konstante weg.

1.
Welchen Inhalt hat das von der Parabel p: $y=1-\frac{1}{4}x^2$ und der Parabelsehne A(-2, 0)B(4, -3) eingeschlossene Gebiet?

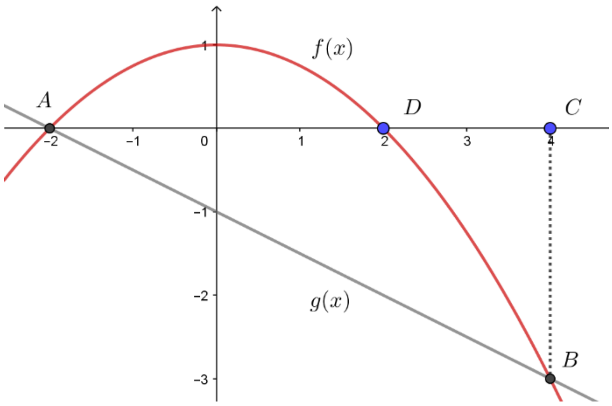
Gleichung der Geraden AB:

$$y=g(x)=-\tfrac{1}{2}x+1$$

$$I=\int_{-2}^{4}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx-\int_{-2}^{4}g(x)dx$$

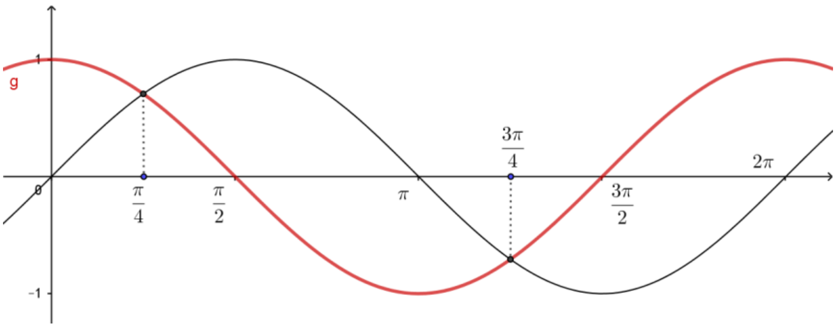
$$=\left(x-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{-2}^{4}-\int_{-2}^{4}g(x)dx$$

$$=0-(-9)=9$$



Das erste Integral hat den Wert 0. Dies bedeutet geometrisch, dass das Gebiet oberhalb der x-Achse im Intervall [-2, 2] und das Gebiet unterhalb der x-Achse im Intervall [2, 4] gleichen Inhalt haben. Der Wert des 2. Integrals kann elementargeometrisch bestimmt werden. Es entspricht dem mit (-1) multiplizierten Inhalt des Dreiecks ABC (das Dreieck liegt unterhalb der x-Achse).

2.
Inhalt des von den Kurven
$y=f_1(x)=\sin x$ und
$y=f_2(x)=\cos x$
eingeschlossenen Gebiets.



Schnittpunkte:
$\sin x=\cos x \quad |:\cos x\neq 0$
$\tan x=1$

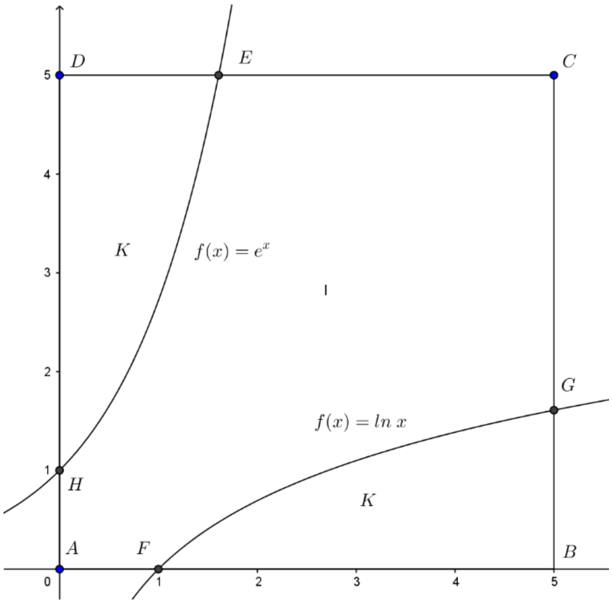
$x_1=\frac{\pi}{4} \qquad x_2=\frac{5\pi}{4} \quad I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)\,dx=(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}=(\cos x+\sin x)\Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}$

3.

Die beiden Kurven

$y = f_1(x) = e^x$ und $y = f_2(x) = \ln x$

schneiden aus dem Quadrat ABCD das Gebiet AFGCEHA aus. Wie gross ist sein Inhalt I?



Aus Symmetriegründen gilt:

$I = 25 - 2K$

Die x-Koordinate von E ergibt sich aus der Bedingung $e^x = 5$ zu $x = \ln 5$

$$K = \int_0^{\ln 5} (5 - e^x)\, dx = (5x - e^x)\Big|_0^{\ln 5} = 5\ln 5 - 4$$

Liegt die später hergeleitete Stammfunktion z.B. aus einer Formelsammlung vor, so ist auch folgende Lösungsvariante möglich:

$$K = \int_1^5 \ln x\, dx = x \cdot (\ln x - 1)\Big|_1^5 = 5\ln 5 - 4$$

Damit gilt:

I = 25 – 2·(5·ln 5 – 4) = 33 - 10·ln 5 ≈ 16.91

4.

Die Kurve $y = e^x$ begrenzt mit der x-Achse und zwei zur y-Achse symmetrisch liegenden Parallelen ein Flächenstück. Bestimme den Abstand u der beiden Parallelen von der y-Achse so, dass die y-Achse den Inhalt des Flächenstücks im Verhältnis 1:2 teilt.

$$2\int_{-u}^{0} e^x dx = \int_0^u e^x dx$$

$2\left(1 - e^{-u}\right) = e^u - 1$ Substitution $z = e^u$

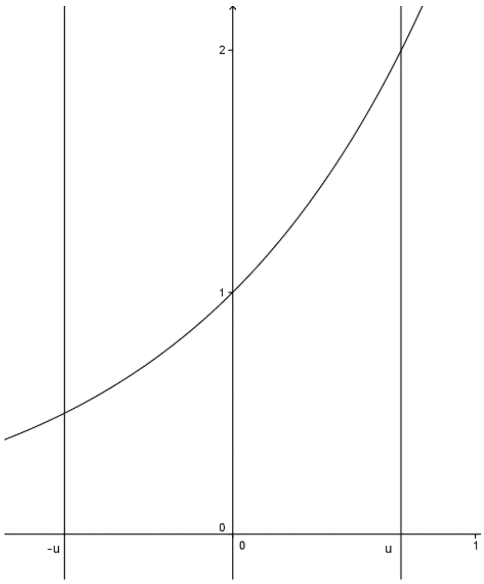
$$2 - \frac{2}{z} = z - 1$$

$$z^2 - 3z + 2 = (z-1)\cdot(z-2) = 0$$

mit den Lösungen ($z_1 = 1$) und $z_2 = 2$.

Die Gleichung

$z = e^u = 2$ hat die Lösung $u = \ln 2$



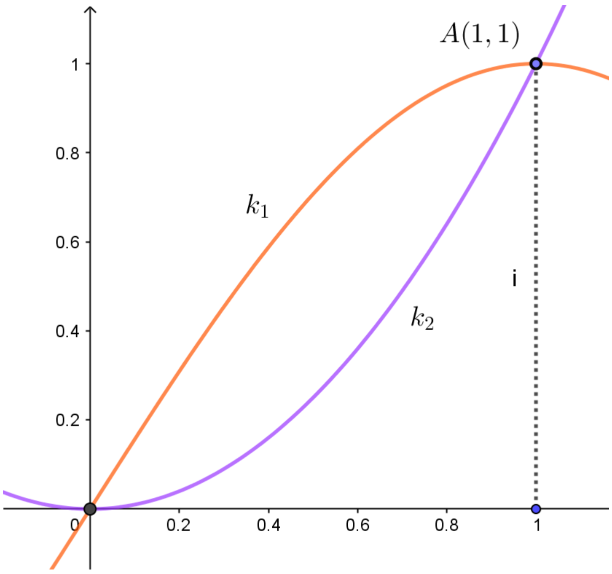
5.
Für welchen Wert des Parameters a schneiden sich die Kurven k_1: $y = \sin(ax)$ und k_2: $y = x^2$ an der Stelle $x = 1$. Welchen Inhalt hat das von den beiden Kurven begrenzte Gebiet I?

Die Gleichung $\sin a = 1$ hat die Lösung $a = \frac{\pi}{2}$
Es ist zu empfehlen, diesen Wert von a erst am Schluss einzusetzen.

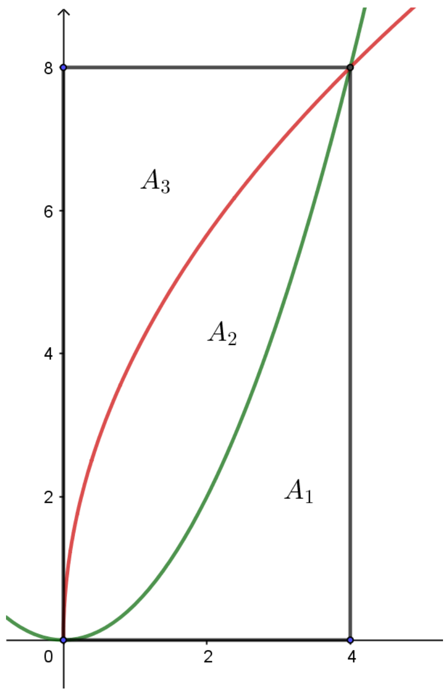
$$\int_0^1 \left(\sin(ax) - x^2\right) dx = \left(-\frac{\cos(ax)}{a} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{\cos(ax)}{a} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = -\left(\frac{\cos a}{a} + \frac{1}{3} - \frac{\cos 0}{a}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3}$$



6.
Gegeben sind die beiden Kurven
$y = f_1(x) = \frac{1}{a} \cdot x^2$ und
$y = f_2(x) = a^2 \cdot \sqrt{x}$ wobei a > 0.
Es ist zu zeigen, dass die drei Gebiete in der Abbildung inhaltsgleich sind:
$A_1 = A_2 = A_3$



Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Kurven:

$$\tfrac{1}{a} \cdot x^2 = a^2 \cdot \sqrt{x} = a^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{a} \cdot x^2 - a^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x^{\frac{3}{2}} - a^3\right) = 0$$

Die Lösungen $x_1 = 0$ oder $x_2 = a^2$ ergeben die Koordinaten der Schnittpunkte (0,0) bzw. (a^2, a^3).
Damit ist zu zeigen, dass gilt:
$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{1}{3} \cdot a^5$

$$A_1 = \tfrac{1}{a} \int_0^{a^2} x^2\, dx = \tfrac{1}{a} \cdot \tfrac{1}{3} x^3 \Big|_0^{a^2} = \tfrac{1}{a} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot a^6 = \tfrac{1}{3} \cdot a^5$$

Zunächst kann $A_1 + A_2$ berechnet werden:

$$A_1 + A_2 = a^2 \cdot \int_0^{a^2} x^{\frac{1}{2}}\, dx = a^2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{a^2} = a^2 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot a^3 = \tfrac{2}{3} \cdot a^5 \text{ woraus } A_2 = \tfrac{1}{3} \cdot a^5 \text{ folgt.}$$

Da der Inhalt des Rechtecks gleich a^5 ist, ist die Behauptung damit bewiesen.

7.

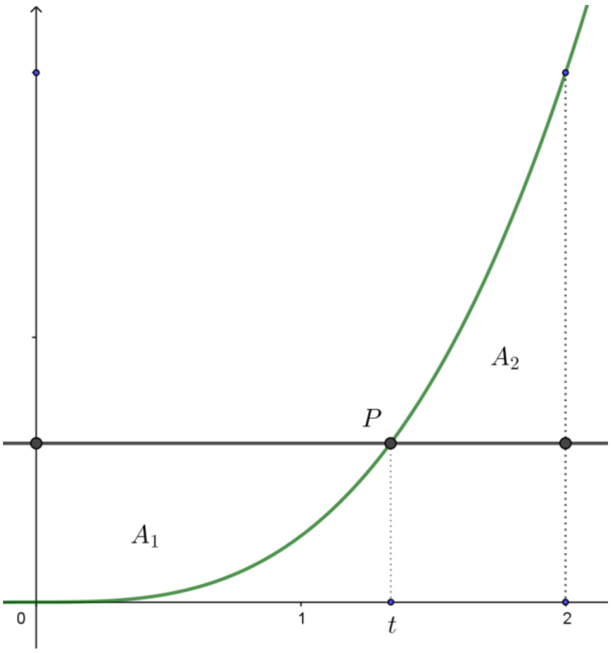
Gegeben ist der Graph der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ im Intervall $[0, 2]$. Durch die Kurvenpunkt P wird eine Parallele zur x-Achse gezogen. Wie ist P zu wählen, dass die dadurch bestimmten Gebiete inhaltsgleich sind?

Wir bezeichnen die Koordinaten des gesuchten Punktes P mit $P(t, \frac{1}{2}\ t^3)$.

Da die beiden Flächeninhalte A_1 und A_2 gleich gross sind, hat das folgende Integral den Wert 0:

$$\int_0^2 (\tfrac{1}{4}t^3 - \tfrac{1}{4}\cdot x^3)\,dx = 0$$

Bei der Integration über die beiden Teilintervalle $[0, t]$ bzw. $[t, 2]$ wird nämlich A_1 positiv, A_2 hingegen negativ gezählt.



$$\int_0^2 (\tfrac{1}{4}t^3 - \tfrac{1}{4}\cdot x^3)\,dx = \tfrac{1}{4}\cdot\int_0^2 (t^3 - x^3)\,dx = \tfrac{1}{4}\cdot(t^3 x - \tfrac{1}{4}\cdot x^4\Big|_0^2 = \tfrac{1}{4}\cdot(2\cdot t^3 - 4) = 0$$

Uns daraus: $t^3 = \frac{1}{2}$ mit der Lösung $t = 2^{\frac{1}{3}}$

Damit hat der gesuchte Punkt P die Koordinaten $P(2^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{2})$

Übungsaufgaben:

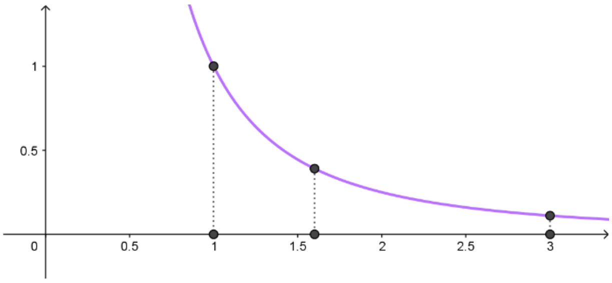
1.

Das von der Kurve mit der Gleichung $y = \frac{1}{x^2}$ $x \neq 0$, der x-Achse und den Geraden x = 1 bzw. x = 3 eingeschlossene Flächenstück soll an der Stelle u durch eine Parallele zur y-Achse in zwei flächengleiche Teile zerlegt werden.

Bedingung:

$$\int_1^u \frac{1}{x^2}\,dx = \int_u^3 \frac{1}{x^2}\,dx \qquad -\frac{1}{x}\Big|_1^u = -\frac{1}{x}\Big|_u^3$$

$$\frac{1}{x}\Big|_u^1 = \frac{1}{x}\Big|_3^u \qquad 1 - \frac{1}{u} = \frac{1}{u} - \frac{1}{3}$$



$$u = \frac{3}{2}$$

2.

Der Parameter a ist so zu bestimmen, dass sich die quadratische Parabel $y = x^2 + a$ und die Kurve $y = \cos x$ an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ schneiden. Welchen Inhalt hat das von den beiden Kurven bestimmte Gebiet?

Lösung:

$$a = -\frac{\pi^2}{4}$$

$$I = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x - \left(x^2 + a\right)\right) dx$$

$$= 2 \cdot \left[\sin x - \left(\frac{x^3}{3} + ax\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2 + \frac{\pi^3}{6}$$