7. Bestimmtes Integral und Flächeninhalt

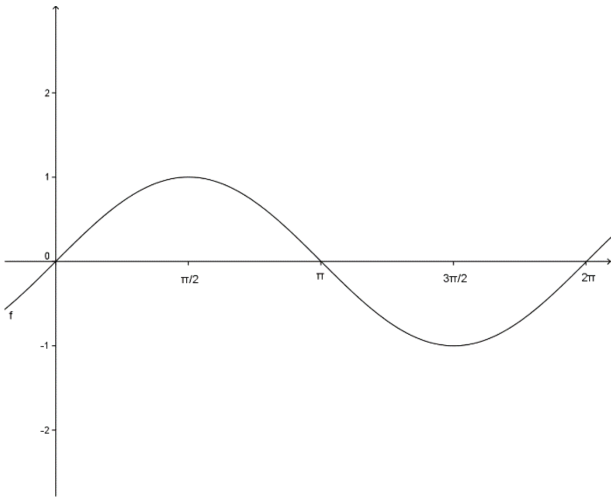
In diesem Abschnitt soll der Zusammenhang zwischen dem bestimmten Integral und dem Flächeninhalt untersucht werden.

einführendes Beispiel:
Berechne die folgenden bestimmten Integrale:

(1) $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = \cos x\Big|_{\pi}^{0} = 2$

(2) $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = \cos x\Big|_{2\pi}^{\pi} = -2$

(3) $\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = \cos x\Big|_{2\pi}^{0} = 0$



Satz:
Ist in einem Intervall der Integrand nicht negativ, so gibt das bestimmte Integral den Inhalt des von der Kurve y = f(x), der x-Achse und den Parallelen x = a bzw. x = b eingeschlossenen Flächenstücks an. vgl. (1)
Ist in einem Intervall der Integrand negativ, so gibt das bestimmte Integral den mit dem Faktor (-1) multiplizierten Flächeninhalt an. vgl. (2)
Hat ein bestimmtes Integral den Wert 0, so bedeutet dies, dass die oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse gelegenen Flächenstücke denselben Inhalt haben.

Der Satz folgt aus der Definition des bestimmten Integrals. Im Falle (2) ist jeder Summand $f(x_k)\cdot\Delta x$ negativ.

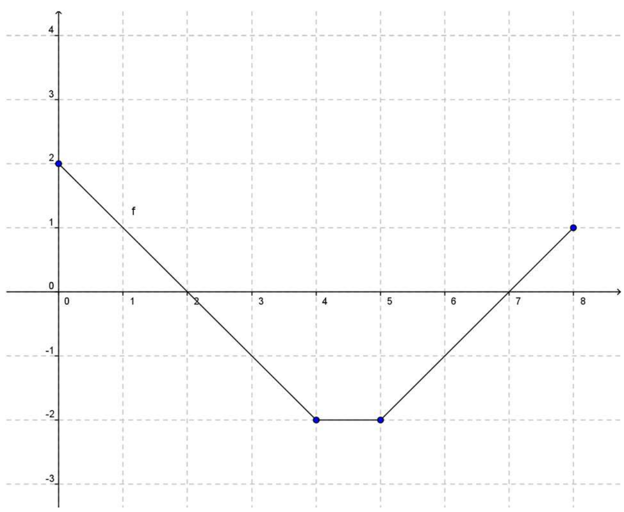
Aufgabe:
Berechne die folgenden bestimmten Integrale mit geometrischen Überlegungen:

a) $\int_0^2 f(x)\,dx = 2$ Dreiecksinhalt 2

b) $\int_2^7 f(x)\,dx = -6$ Trapezinhalt 6

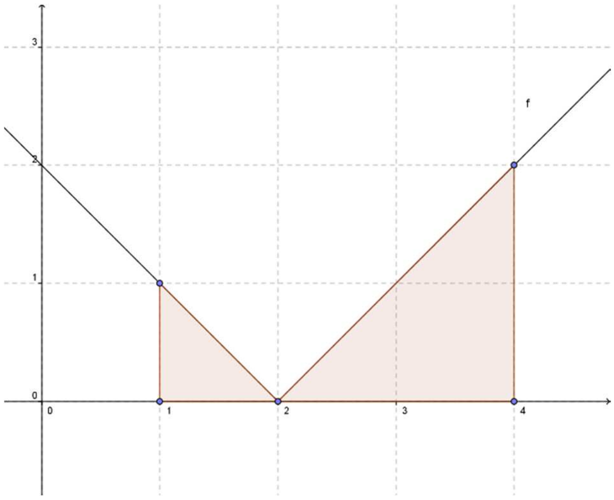
c) $\int_0^7 f(x)\,dx = 2-6 = -4$

d) $\int_0^8 f(x)\,dx = 2-6+\frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$



e

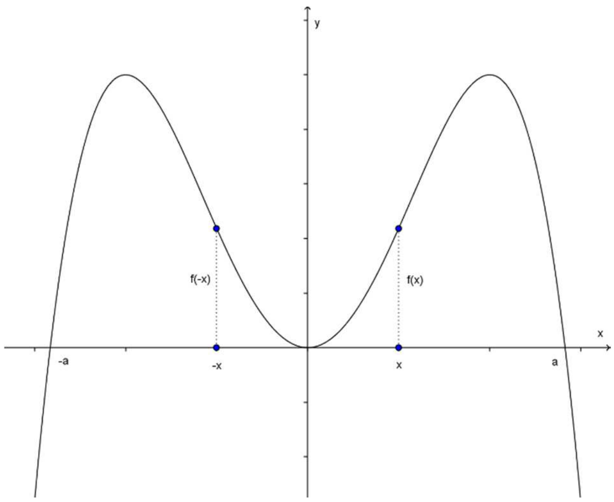
$$\int_1^4 |x-2|\,dx = \tfrac{5}{2}$$



Für symmetrische Graphen ergeben sich
bei der Berechnung von bestimmten Integralen folgende Vereinfachungen:

G_f sei axialsymmetrisch zur y-Achse d.h. $f(-x) = f(x)$ im Intervall [-a,a]

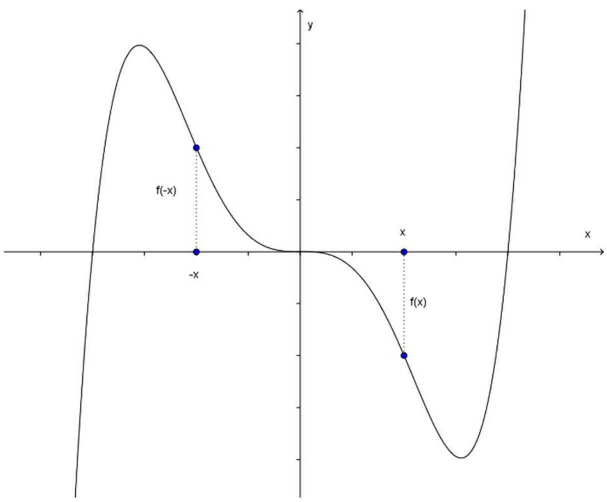
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)\,dx$$



G_f sei zentralsymmetrisch zum Nullpunkt d.h. $f(-x) = f(x)$ im Intervall [-a,a]

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse
liegende Gebiete haben gleichen Inhalt.



B:

$$\int_{-2}^{2}\left(2x+3x^2-x^3\right)dx=\int_{-2}^{2}\left(2x-x^3\right)dx+\int_{-2}^{2}3x^2dx=0+2\cdot\int_{0}^{2}3x^2dx=2\cdot x^3\Big|_0^2=16$$

Der Integrand wird in zwei Summanden zerlegt. Der Graph des 1. Summanden ist zentralsymmetrisch, der des 2. axialsymmetrisch.

B:

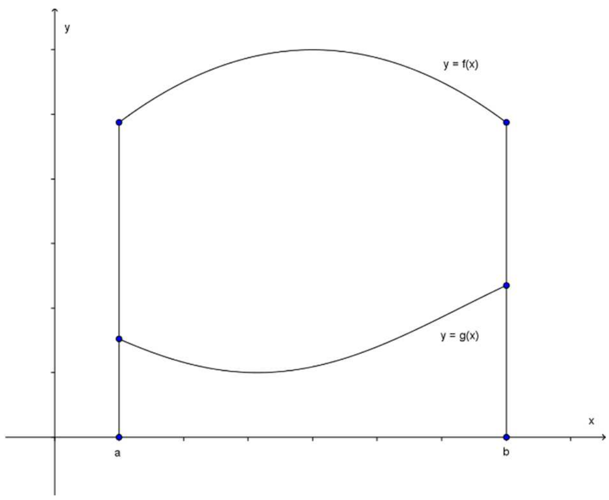
Why ist $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{1}x^{-2}dx=\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_{-1}^{1}=x^{-1}\Big|_{1}^{-1}=-2$ obviously wrong?

Die Stelle x = 0 ist eine Polstelle. Deshalb ist das bestimmte Integral nicht definiert.

8. Flächen zwischen zwei Kurven

Die Kurven y = f(x) bzw. y = g(x) und die Parallelen x =a und x = b begrenzen ein Flächenstück, dessen Inhalt I zu berechnen ist.

Zusätzliche Voraussetzung:
Im Intervall [a,b] sei f(x) ≥ g(x)



Für den gesuchten Flächeninhalt I gilt:

$$I=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

Bem.:
Der Term nach dem Integralzeichen kann als Inhalt eines infinitesimalen Rechtecks der Höhe f(x) – g(x) und der Breite dx aufgefasst werden.

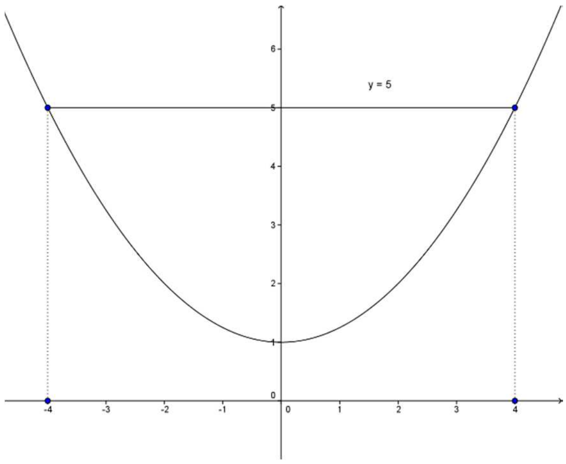
Aufgabe:
Berechne den Inhalt I des von der Parabel mit der Gleichung y = $^1/_4\, x^2 + 1$ und der Parallelen zur x-Achse mit der Gleichung y = 5 begrenzten Flächenstücks.

Schnittpunkte:

$\frac{1}{4}x^2+1=5 \qquad \frac{1}{4}x^2=4 \qquad x_{1,2}=\pm 4$

$$I=\int_{-4}^{4}\left(5-\left(\tfrac{1}{4}x^2+1\right)\right)dx=2\cdot\int_{0}^{4}\left(4-\tfrac{1}{4}x^2\right)dx$$

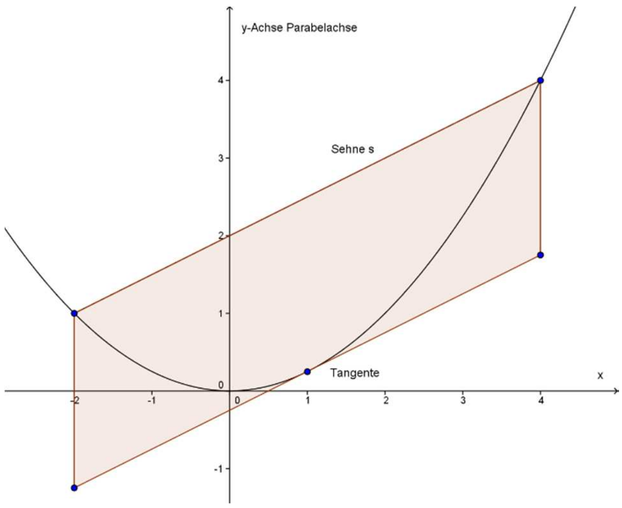
$$=2\cdot\left(4x-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_0^4=2\cdot\left(16-\tfrac{64}{12}\right)=\tfrac{64}{3}=\tfrac{2}{3}\cdot 8\cdot 4$$



Bem.:
Symmetrie beachten!
Das Ergebnis ist ein Spezialfall des folgenden Satzes, der auf Archimedes zurückgeht:

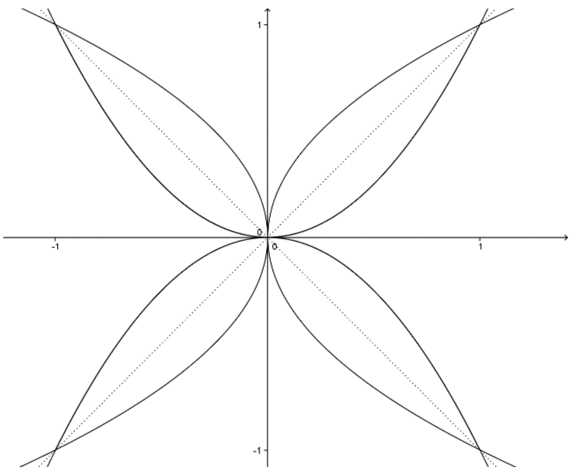
Satz:
Die Fläche eines Parabelsegments gleich zwei Dritteln der Fläche des dem Segment umbeschriebenen Parallelogramms. (archimedische Formel)

$A=\frac{2}{3}sh$



Aufgaben:
1.
Berechne den Inhalt I des abgebildeten "vierblättrigen" Kleeblatts.

Berechne zunächst den Inhalt I_1 des von der 1. Winkelhalbierenden y = x und der Parabel y = x^2 im 1. Quadranten begrenzten Flächenstücks. I ist achtmal so gross.



$$I = 8I_1 = 8\int_0^1 \left(x - x^2\right) dx = 8\left(\tfrac{1}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right) = 8 \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{4}{3}$$

Beachte:

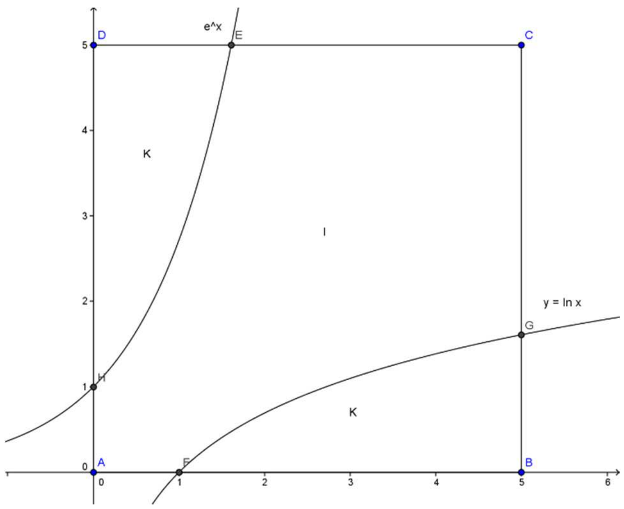
$$\int_0^1 x dx = \tfrac{1}{2}$$

elementar berechnet (halbes Einheitsquadrat!)

Zusatzfragen:
Winkel bei der Blattspitze? (36.8°)
Blattbreite?

2.
Gegeben

Die beiden Kurven
$y = f_1(x) = e^x$ und $y = f_2(x) = \ln x$
schneiden aus dem Quadrat ABCD das Gebiet AFGCEHA aus. Berechne seinen Inhalt I.



Aus Symmetriegründen gilt:
I = 25 – 2K.

Die x-Koordinate von E ergibt sich aus der Bedingung $e^x = 5$ zu x = ln 5

$$K = \int_0^{\ln 5} (5 - e^x)\, dx = (5x - e^x)\Big|_0^{\ln 5} = 5\ln 5 - 4$$

Liegt die später hergeleitete Stammfunktion z.B. aus einer Formelsammlung vor ist auch folgende Lösungsvariante möglich:

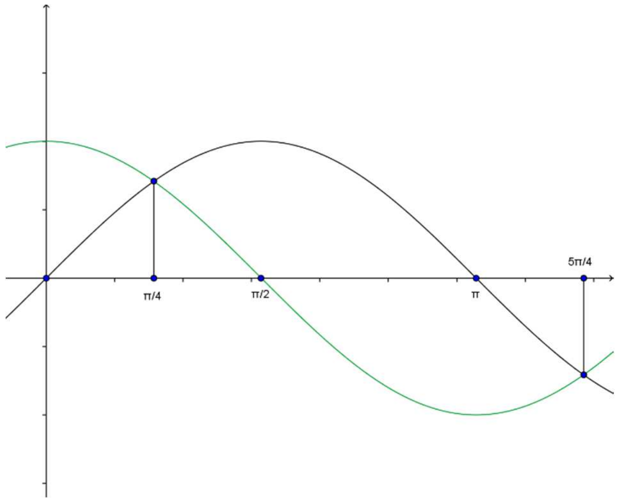
$$K = \int_1^5 \ln x\, dx = x \cdot (\ln x - 1)\Big|_1^5 = 5\ln 5 - 4$$

Damit gilt:
I = 25 – 2·(5·ln 5 – 4) = 33 - 10·ln 5 ≈ 16.91

Der Satz gilt auch, wenn das betrachtete Flächenstück teilweise unterhalb der x-Achse liegt

Beweis:
Verschiebe das Flächenstück so um c Einheiten in y-Richtung, dass es ganz oberhalb der x-Achse zu liegen kommt. Die Gleichungen der verschobenen Kurven heissen nun:
y = f(x) + c bzw. y = g(x) + c mit geeignet gewähltem c. Da über die Differenz zu integrieren ist, fällt die Konstante weg.

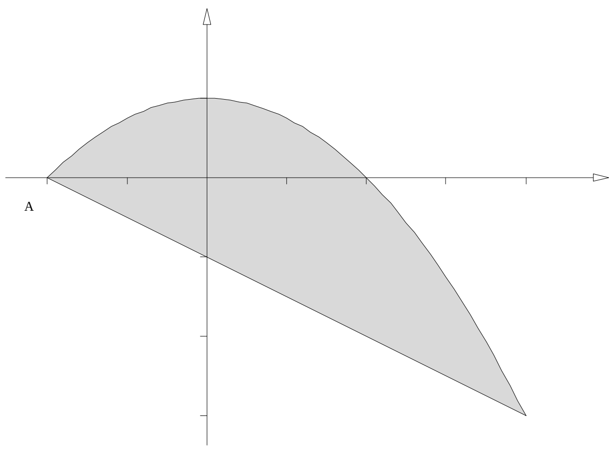
Aufgaben:
1.
Berechne den Inhalt des von den Kurven
$y = f_1(x) = \sin x$ und $y = f_2(x) = \cos x$
eingeschlossenen Gebiets.



Schnittpunkte:
$\sin x = \cos x \quad | : \cos x$
$\tan x = 1$
$x_1 = \frac{\pi}{4} \qquad x_2 = \frac{5\pi}{4}$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,dx = (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = (\cos x + \sin x)\Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$$

2.
Berechne den Inhalt des von der Parabel p: $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$ und der Parabelsehne A(-2/0)B(4/-3) eingeschlossenen Gebiets.



Gleichung der Geraden AB:
$y = g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

$$I = \int_{-2}^{4} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx - \int_{-2}^{4} g(x)dx$$
$$= \left(x - \frac{x^3}{12}\right)\Big|_{-2}^{4} - \int_{-2}^{4} g(x)dx$$
$$= 0 - (-9) = 9$$

Das erste Integral hat den Wert 0. Dies bedeutet geometrisch, dass das punktierte Gebiet oberhalb der x-Achse und das schraffierte unterhalb der x-Achse gleichen Inhalt haben. Der Wert des 2. Integrals kann elementargeometrisch bestimmt werden. Es entspricht dem mit (-1) multiplizierten Inhalt des Dreiecks ABC (das Dreieck liegt unterhalb der x-Achse).

3.
Die Kurve y = e^x begrenzt mit der x-Achse und zwei zur y-Achse symmetrisch liegenden Parallelen ein Flächenstück. Bestimme den Abstand u der beiden Parallelen von der y-Achse so, dass die y-Achse den Inhalt des Flächenstücks im Verhältnis 1:2 teilt.

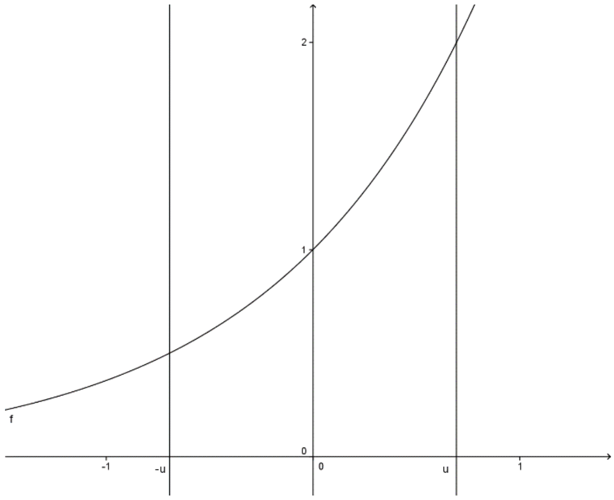
$$2\int_{-u}^{0} e^x dx = \int_{0}^{u} e^x dx$$

$$2\left(1-e^{-u}\right) = e^u - 1 \qquad \text{Substitution } z = e^u$$

$$2-\frac{2}{z} = z-1$$

$$z^2 - 3z + 2 = (z-1)\cdot(z-2) = 0$$

mit den Lösungen ($z_1 = 1$) und $z_2 = 2$
die Gleichung
$z = e^u = 2$ hat die Lösung $u = \ln 2$



Übungsaufgabe:

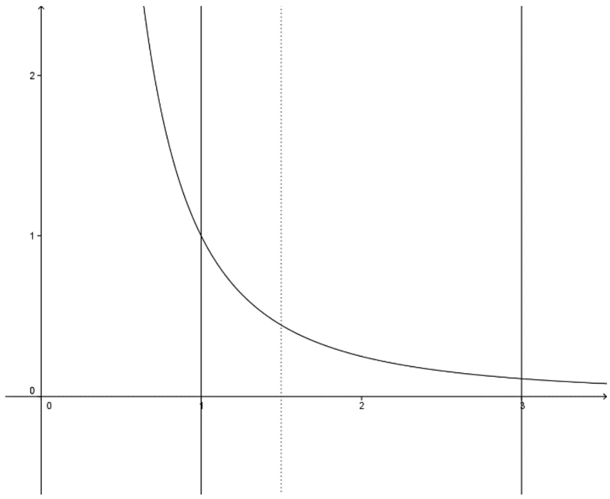
Das von der Kurve mit der Gleichung $y = \frac{1}{x^2} \quad x \neq 0$, der x-Achse und den Geraden x = 1 bzw. x = 3 eingeschlossene Flächenstück soll an der Stelle u durch eine Parallele zur y-Achse in zwei flächengleiche Teile zerlegt werden.

Bedingung:

$$\int_{1}^{u} \frac{1}{x^2} dx = \int_{u}^{3} \frac{1}{x^2} dx \qquad -\frac{1}{x}\Big|_{1}^{u} = -\frac{1}{x}\Big|_{u}^{3}$$

$$\frac{1}{x}\Big|_{u}^{1} = \frac{1}{x}\Big|_{3}^{u} \qquad 1-\frac{1}{u} = \frac{1}{u} - \frac{1}{3}$$

u = $^3/_2$

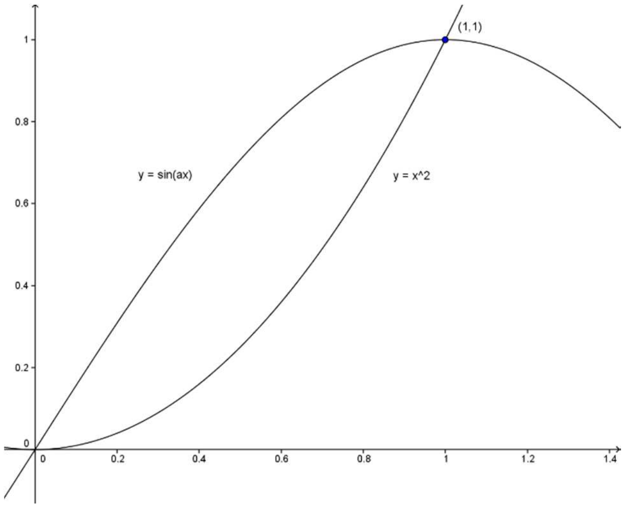


4.

Bestimme den Parameter a so, dass sich die Kurven k1 : $y = \sin(ax)$ und k2 : $y = x^2$ an der Stelle x = 1 schneiden und berechne den Inhalt des eingeschlossenen Flächenstücks.

Die Gleichung $\sin a = 1$ hat die Lösung $a = \frac{\pi}{2}$

Empfehlung:
den Wert von a erst am Schluss einsetzen.

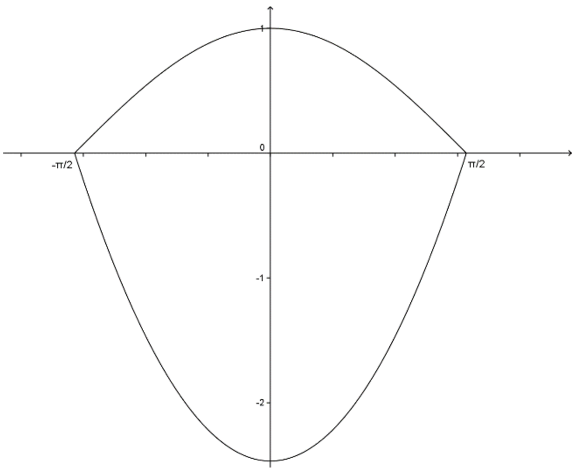


$$\int_0^1 \left(\sin(ax) - x^2\right) dx = \left(-\frac{\cos(ax)}{a} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{\cos(ax)}{a} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = -\left(\frac{\cos a}{a} + \frac{1}{3} - \frac{\cos 0}{a}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3}$$

Uebungsaufgabe:
Wähle den Parameter a so, dass sich die quadratische Parabel $y = x^2 + a$ und die Kurve $y = \cos x$ an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ schneiden. Bestimme den Inhalt des schraffierten Gebiets.



Lösung:

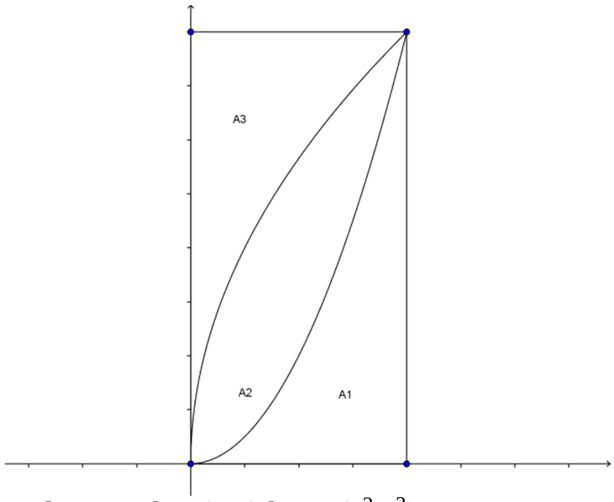
$$a = -\frac{\pi^2}{4}$$

$$I = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x - \left(x^2 + a\right)\right) dx$$

$$= 2 \cdot \left[\sin x - \left(\frac{x^3}{3} + ax\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2 + \frac{\pi^3}{6}$$

5.
Gegeben: $y = f_1(x) = \frac{1}{a} \cdot x^2$ und
$y = f_2(x) = a^2 \cdot \sqrt{x}$ wobei a > 0.
Zeige :
Die drei Gebiete in der Skizze
sind inhaltsgleich: $A_1 = A_2 = A_3$



Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Kurven:

$\frac{1}{a} \cdot x^2 = a^2 \cdot \sqrt{x} = a^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{a} \cdot x^2 - a^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot (x^{\frac{3}{2}} - a^3 = 0$

$x_1 = 0$ oder $x_2 = a^2$ ergeben die Koordinaten der Schnittpunkte (0,0) bzw. (a^2,a^3). Damit ist zu zeigen, dass gilt:

$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{1}{3} \cdot a^5$

A_1 = ?

$$A_1 = \frac{1}{a} \int_0^{a^2} x^2\, dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{a^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{3} \cdot a^6 = \frac{1}{3} \cdot a^5$$

A_2 = ?

$$A_1 + A_2 = a^2 \cdot \int_0^{a^2} x^{\frac{1}{2}}\, dx = a^2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^{a^2} = a^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot a^3 = \frac{2}{3} \cdot a^5 \text{ woraus } A_2 = \frac{1}{3} \cdot a^5 \text{ folgt.}$$

Da der Inhalt des Rechtecks gleich a^5 ist, ist die Behauptung damit bewiesen.

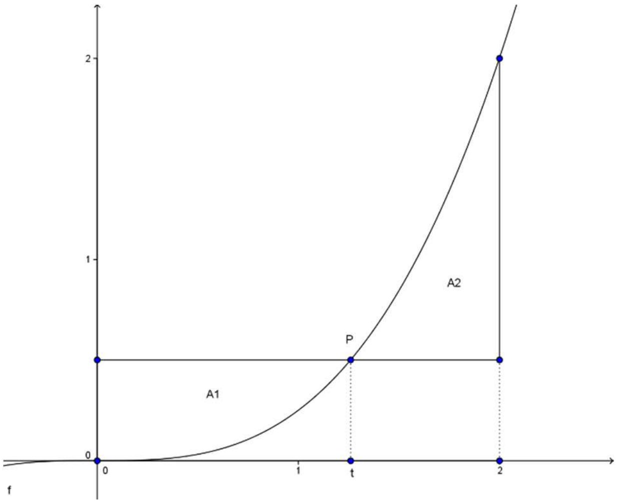
6.
Gegeben ist der Graph der Funktion f mit der Gleichung f(x) = x^3 im Intervall [0,2].
Durch die Kurvenpunkt P wird eine Parallele zur x-Achse gezogen. Wie ist P zu wählen, dass die dadurch bestimmten Gebiete inhaltsgleich sind?

Wir bezeichnen die Koordinaten des gesuchten Punktes P mit P(t, t^3).

Wir betrachten das folgende Integral:

$$\int_0^2 (\tfrac{1}{4}t^3 - \tfrac{1}{4}\cdot x^3)\,dx$$

Da die beiden Flächeninhalte A_1 und A_2 gleich sind ist der Wert dieses Integrals 0.Bei der Integration über die beiden Teilintervalle [0,t] bzw. [t,2] wird nämlich A_1 positiv, A_2 hingegen negativ gezählt.



$$\int_0^2 (\tfrac{1}{4}t^3 - \tfrac{1}{4}\cdot x^3)\,dx = \tfrac{1}{4}\cdot\int_0^2 (t^3 - x^3)\,dx = \tfrac{1}{4}\cdot(t^3 x - \tfrac{1}{4}\cdot x^4\Big|_0^2 = \tfrac{1}{4}\cdot(2\cdot t^3 - 4)$$

Damit hat der gesuchte Punkt P die Koordinaten $P(2^{\frac{1}{3}}, \tfrac{1}{2})$