5. Integralregeln

Die folgenden Regeln vereinfachen die Berechnung bestimmter Integrale. Sie lassen sich mit der Definition des bestimmten Integrals oder dem Hauptsatz begründen.

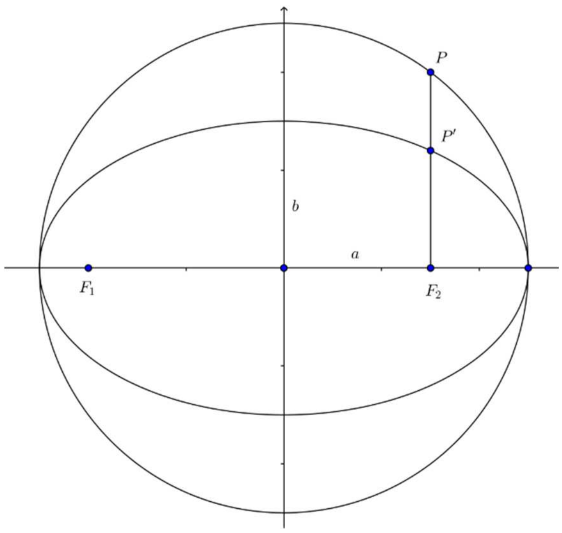
1. Konstantenregel:

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

Ein konstanter Faktor darf vor das Integralzeichen geschrieben werden. Multiplikation mit einer Konstanten und Integration sind also vertauschbar.

Beispiel:

$$\int_0^1 2 \cdot e^x dx = 2 \cdot \int_0^1 e^x dx = 2 \cdot (e-1)$$



Beispiel:
Inhalt der Ellipse
Die Ellipse kann als normalaffines Bild eines Kreises aufgefasst werden:

$$\mathrm{A} = 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{a} \cdot \pi a^2 = \pi ab$$

2. Summenregel:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \qquad (2)$$

Integration und Summation bzw. Differenz sind vertauschbar.

$$\int_1^3 \left(2x^2 - 3x + 5\right) dx - \int_1^3 \left(-x^2 - 3x + 5\right) dx = \int_1^3 3x^2 dx = x^3\Big|_1^3 = 26$$

Multiplikation und Integration sind hingegen nicht vertauschbar und das Integral des Kehrwerts einer Funktion ist nicht gleich dem Kehrwert des Integrals der Funktion.

3. Additivität des Integrals

Ist $c \in [a, b]$ dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (3)$$

Das bestimmte Integral war bisher unter der Voraussetzung a < b definiert. In Übereinstimmung mit der Anschauung erweitern wir die Definition für a ≥ b:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$ (4) und wie es der Hauptsatz nahelegt

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad (5)$$

d.h. beim Vertauschen der Integrationsgrenzen ändert das Vorzeichen.

Tipp: (5) gibt die Möglichkeit, unliebsame Minuszeichen „zum Verschwinden" zu bringen.

Beispiel:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = \cos x\Big|_\pi^0 = 2$$

Mit den Definitionen (4) und (5) gilt die Regel (3) für beliebige reelle Zahlen a, b, und c.

6. Integrationstechniken

Nach dem Hauptsatz ist die Berechnung bestimmter Integrale einfach, wenn eine Stammfunktion des Integranden bekannt ist. Bei der Suche nach einer Stammfunktion können folgende Techniken helfen:

1.
Grundintegrale in Formeln und Tafeln
speziell: Anwendungen der Potenzregel

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}dx = -\frac{1}{x} + c$$

Wurzeln als Potenzen mit rationalen Exponenten darstellen

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \tfrac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \quad x \neq 0$$ Ausnahmefall!

2.
Kommt im Integranden ein Bruch vor, so wird man nach Möglichkeit dividieren!

$$\int \frac{x^3+2x-1}{x^2}\,dx = \int\left(x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| + \frac{1}{x} + c \quad x \neq 0$$

3.
Einfache zusammengesetzte Integranden (Gegenstück zur Kettenregel)

Beispiele:

wegen $(\sin x)' = \cos x$ gilt $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

wegen $(\sin(2x))' = 2\cdot\cos(2x)$ gilt:

$$\int \cos(2x)dx = \tfrac{1}{2}\cdot\sin(2x) + c$$

oder allgemein: $\int \cos(ax)dx = \tfrac{1}{a}\cdot\sin(ax) + c$

wegen $(e^x)' = e^x$ gilt: $\int e^x dx = e^x + c$

wegen $(e^{-x})' = -e^{-x}$ gilt: $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + c$

analog:

$$\int (3x-2)^{10}dx = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{(3x-2)^{11}}{11} + c$$

$\int e^{-2x}dx = -\tfrac{1}{2}e^{-2x} + c$ $\int e^{ax}dx = \tfrac{1}{a}e^{ax} + c$

$$\int 2^x\,dx = \int e^{x\cdot\ln 2}dx = \tfrac{1}{\ln 2}\cdot e^{x\cdot\ln 2} + c = \tfrac{1}{\ln 2}\cdot 2^x + c$$

allgemein: $\int a^x\,dx = \frac{1}{lna}\cdot a^x dx$

$$\int_0^{\ln 4} \left(4e^x - e^{2x}\right) dx = \left(4e^x - \tfrac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^{\ln 4}$$

$$\int \frac{4-e^x}{e^x} dx = 4\int (e^{-x}-1)\, dx = -4e^{-x} - x + c$$

$$\int \frac{x^2+1}{x-1} dx = \int \frac{x^2-1+2}{x-1} dx = \int\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right) dx = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + c \quad x \neq 1$$

4.
Logarithmische Integration

Nach der Kettenregel gilt: $\left(\ln(x^2+1)\right)' = \dfrac{2x}{x^2+1}$ oder also $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln\left(x^2+1\right) + c$
Im Zähler steht gerade die Ableitung des Nenners. Die Verallgemeinerung dieser Idee führt auf:

$\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + c \quad g(x) \neq 0$ sogenannte **logarithmische Integration**

weitere Beispiele:

$$\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \ln\left(e^x+1\right) \quad + c$$

$$\int \cot x\, dx == \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c \qquad \sin x \neq 0$$

In einigen Fällen ist eine Korrektur nötig:

$$\int \frac{dx}{2+3x} = \tfrac{1}{3} \cdot \int \frac{3dx}{2+3x} = \tfrac{1}{3} \cdot \ln|2+3x| + c \qquad x \neq -\tfrac{2}{3}$$

$$\int \frac{\cos x}{3+2\sin x} dx = \tfrac{1}{2}\int \frac{2\cdot\cos x}{3+2\sin x} dx = \tfrac{1}{2} \cdot \ln\left(3+2\sin x\right) + c$$

Später werden besprochen:
Substitutionsregel als Gegenstück zur Kettenregel
Partielle Integration als Gegenstück zur Produktregel
Partialbruchzerlegung: Integration von gebrochen rationalen Funktionen

Es gibt einfache Integranden, für die keine aus elementaren Funktionen zusammengesetzte Stammfunktion existiert z.B $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$
Es gibt also bestimmte Integrale, die nicht mit dem Hauptsatz berechnet werden können. In diesen Fällen ist man auf Näherungsverfahren → Numerische Integration angewiesen.