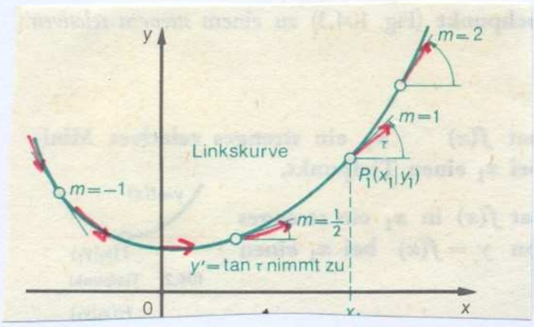
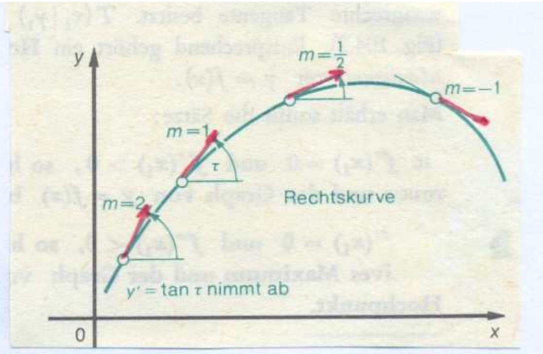
3. Krümmungsverhalten, Wendepunkte





In einer Linkskurve verläuft der Graph oberhalb der Tangente, die Tangenten drehen im Gegenuhrzeigersinn, die Tangentensteigungen nehmen zu.

In einer Rechtskurve verläuft der Graph unterhalb der Tangente, die Tangenten drehen im Uhrzeigersinn, die Tangentensteigungen nehmen ab.

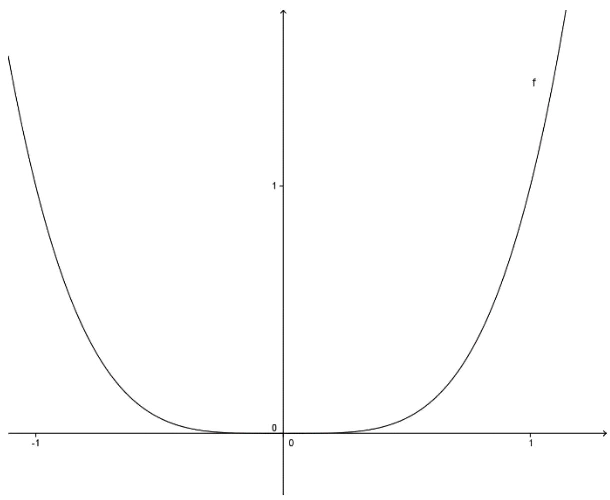
Def.
Der Graph der Funktion f ist in einem Intervall I rechtsgekrümmt (linksgekrümmt) genau dann wenn die Tangentensteigung in I monoton abnimmt (zunimmt).

Da das Wachstumsverhalten der Tangentensteigung f ' durch die 1. Ableitung von f ' also von f '' beschrieben wird folgt nach Satz 1

Satz 3:
Ist $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) in I dann hat der Graph von f in I eine **Linkskurve** (**Rechtskurve**).

Im Spezialfall der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist $f''(x) = 2a$ und es ergibt sich erneut:
Für a > 0 ist die Parabel linksgekrümmt (nach oben geöffnet), für a < 0 rechtsgekrümmt (nach unten geöffnet).

Bem.:
DerGraph der Funktion $f(x) = x^4$ ist linksgekrümmt,
obwohl $f''(x) \geq 0$, denn es ist $f''(0) = 0$.
Die Bedingung von Satz 3 ist also hinreichend aber nicht notwendig.



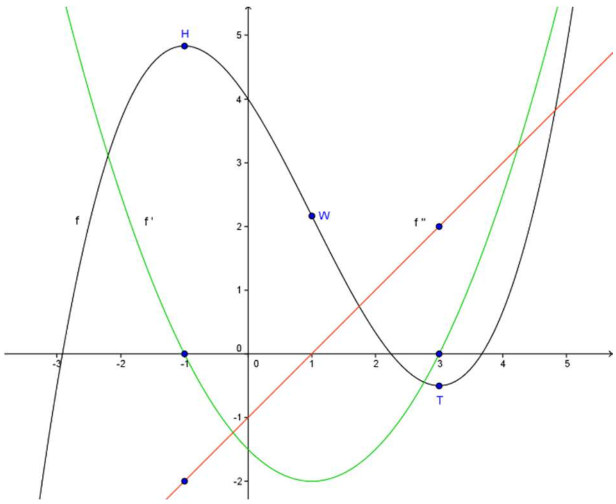
Da Hochpunkte in Rechtskurven und Tiefpunkte in Linkskurven liegen ist das folgende Kriterium anschaulich klar:

Satz 4:
Ist $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)>0$ ($f''(x_0)<0$) , dann hat f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum (lokales Maximum).

Begründung:
Aus $f''(x_0)>0$ und der Stetigkeit von f " ist die 2. Ableitung auch in einer gewissen Umgebung von x_0 positiv, also die 1. Ableitung monoton wachsend. Wegen $f'(x_0)=0$ wechselt damit die 1. Ableitung an der Stelle x_0 das Vorzeichen von - nach + woraus die Behauptung. folgt.

Aufgabe:
Untersuche das Krümmungsverhalten der Funktion f: $f(x)=\frac{1}{6}\left(x^3-3x^2-9x+24\right)$ und bestimme die Extrema.

$f'(x)=\frac{1}{6}\left(3x^2-6x-9\right)=\frac{1}{2}\left(x^2-2x-3\right)$
$=\frac{1}{2}(x-3)(x+1)$
$f''(x)=x-1$
Für x < 1 ist $f''(x)<0$, der Graph von f hat also für
x < 1 eine Rechtskurve.
Für x > 1 ist $f''(x)>0$, der Graph von f hat also für
x > 1 eine Linkskurve.



An der Stelle x = -1 gilt: $f'(-1)=0$. Da $f''(-1)=-2<0$ ist in einer Umgebung von - 1 der Graph G_f rechtsgekrümmt also liegt ein Hochpunkt vor: $H\left(-1,\frac{29}{6}\right)$
An der Stelle x = 3 gilt: $f'(3)=0$. Da $f''(3)=2>0$ ist in einer Umgebung von 3 der Graph G_f linksgekrümmt, also liegt ein Tiefpunkt vor: $T\left(3,-\frac{1}{2}\right)$

Da der Graph von f für x < 1 eine Rechtskurve, für x > 1 eine Linkskurve hat,wechselt an der Stelle x = 1 der Krümmungssinn, an dieser Stelle liegt damit ein sogenannter Wendepunkt $W\left(1,\frac{13}{6}\right)$ vor.

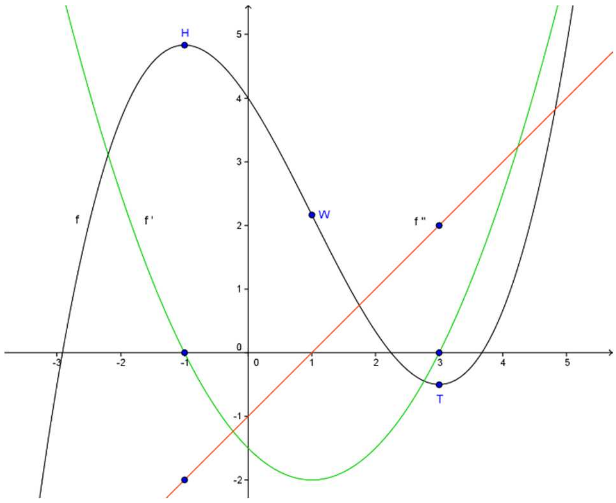
Aufgabe:
Bestimme eine Gleichung der Tangente im Wendepunkt.

Wegen $f'(1) = -2$ kann die Tangentengleichung in der folgenden Form angesetzt werden:
t: $y = -2x + q$
q ist durch die Bedingung bestimmt, dass die Koordinaten des Wendepunkts die Tangentengleichung erfüllen:
$\frac{13}{6} = -2 + q$ $\qquad$ $q = \frac{25}{6}$ $\qquad$ t: $y = -2x + \frac{25}{6}$

Uebungsaufgabe:
Bestimme eine Gleichung der Wendetangente t des Graphen der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ und den Steigungswinkel von t.

Lösung:
$f'(x) = x^2 - 6x + 5$ $\qquad$ $f''(x) = 2x - 6 = 0$ $\quad$ $f'''(x) = 2 \neq 0$
x = 3, f(3) = -1 und damit W(3,-1)
$f'(3) = -4$ $\qquad$ t: y = -4x + 11 $\qquad$ tan α = - 4, $\qquad$ $\alpha \approx -76°$

4. Wendepunkte



Die Aussagen des eben betrachteten Beispiels (siehe nebenstehende Skizze) können folgendermassen verallgemeinert werden:

Anschaulich:
Bei einem Wendepunkt geht ein Linkskurvenbogen in einen Rechtskurvenbogen über oder umgekehrt. Wendepunkte zeichnen sich aber auch dadurch aus, dass dort die Tangentensteigung minimal bzw. maximal ist. Deshalb definieren wir:

Def.
Der Graph einer Funktion f hat an einer Stelle x_0 einen Wendepunkt, wenn die 1. Ableitung f ' an der Stelle x_0 ein Extremum hat.

Wegen dieser Extremaleigenschaft von f ´ lassen sich die Sätze 2 und 4 unmittelbar übertragen:

Satz 5:
Ist an einer Stelle x_0 $f''(x_0)=0$ und wechselt die 2. Ableitung f '' bei x_0 das Vorzeichen, dann hat der Graph von f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.

Satz 6:
Ist $f''(x_0)=0$ und $f'''(x_0)\neq 0$, dann hat der Graph von f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.

Bemerkung:
Die Bedingung für die 3. Ableitung ist wesentlich. Sie garantiert nämlich, dass die 2. Ableitung an der Stelle x_0 das Vorzeichen wechselt.
Zur Illustration betrachten wir etwa $f(x)=x^4$. Wegen $f'''(0)=0$ ist zunächst keine Aussage möglich. Wegen $f'(x)=4x^3$ ist aber f in einer Linksumgebung von 0 monoton fallend und in einer Rechtsumgebung monoton steigend, also liegt an der Stelle 0 ein Tiefpunkt vor.

Spezialfall:
Ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente heisst **Terrassenpunkt** (**Sattelpunkt**).

Beispiel:
Der Graph von $f(x) = x^3$ hat an der Stelle 0 einen Terrassenpunkt.

Uebungsaufgabe:
Find the maximum slopeof the graph of $y = f(x) = -x^3+3x^2+9x-27$

Lösung:
$f'(x)=-3x^2+6x+9$ $f''(x)=6-6x=0$. Mit der Lösung x = 1. Die maximale Steigung ist $f'(1)=12$ (geom.: y-Koordinate des Parabelscheitels des Graphen von f‘).

Zusammenfassung

Satz 1:
Ist in einem Intervall I $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) dann ist die Funktion f im Intervall I monoton **steigend** (**fallend**).

Satz 2:
Wechselt die 1. Ableitung f ' an der Stelle x_0 das Vorzeichen von - nach + (von + nach -) dann hat f an der Stelle x_0 ein **lokales Minimum** (**lokales Maximum**) und G_f einen **Tiefpunkt** $T(x_0, f(x_0))$ (**Hochpunkt** $H(x_0, f(x_0))$).

Satz 3:
Ist $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) in I dann hat der Graph von f in I eine **Linkskurve** (**Rechtskurve**).

Satz 4:
Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), dann hat f an der Stelle x_0 ein **lokales Minimum** (**lokales Maximum**). und der Graph G_f einen **Tiefpunkt** $T(x_0, f(x_0))$ (**Hochpunkt** $H(x_0, f(x_0))$).

Satz 5:
Ist an einer Stelle x_0 $f''(x_0) = 0$ und wechselt die 2. Ableitung f " bei x_0 das Vorzeichen, dann hat der Graph von f an der Stelle x_0 einen **Wendepunkt** $W(x_0, f(x_0))$.

Satz 6:
Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann hat der Graph von f an der Stelle x_0 einen **Wendepunkt** $W(x_0, f(x_0))$**.**

Umgekehrt gilt:

Satz 7:
f hat an der Stelle x_0 ein Extremum $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$

Satz 8:
Der Graph von f hat an der Stelle x_0 einen Wendepunkt $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$