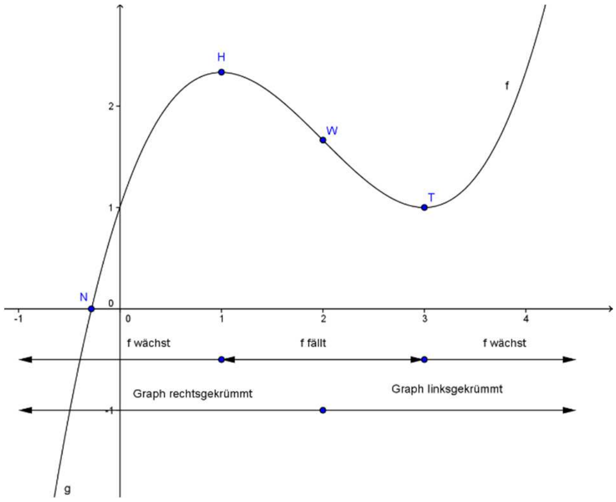
Kurvendiskussion

1. Einleitung

Das Thema dieses Kapitels ist die geometrische Bedeutung der ersten und der höheren Ableitungen. Es geht um die Frage, welche Rückschlüsse können von den Ableitungen auf die Eigenschaften des Graphen einer Funktion gezogen werden wie z.B.



- In welchem Intervall wächst bzw. fällt eine Funktion f?
- Wie bestimmt man lokale Maxima bzw. Minima der Funktion bzw. Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f?
- In welchem Intervall ist der Graph der Funktion links- bzw. rechtsgekrümmt?
- Wie bestimmt man die Wendepunkte des Graphen?

Als schöne Anwendung werden Extremalprobleme gelöst wie z.B.
Für welche Dose von 1 Liter Inhalt ist der Materialverbrauch (die Oberfläche) am kleinsten?

In den folgenden Abschnitten wird vorausgesetzt, dass die gegebene Funktion dreimal differenzierbar ist. In diesem Fall sind die ersten beiden Ableitungen stetig.

In früheren Abschnitten wurden untersucht:
Die lineare Funktion mit der Gleichung $y = f(x) = ax + b$.
Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.
Die quadratische Funktion mit der Gleichung $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.
Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel.

Diese beiden Funktionstypen sind Spezialfälle der sogenannten Polynomfunktionen.

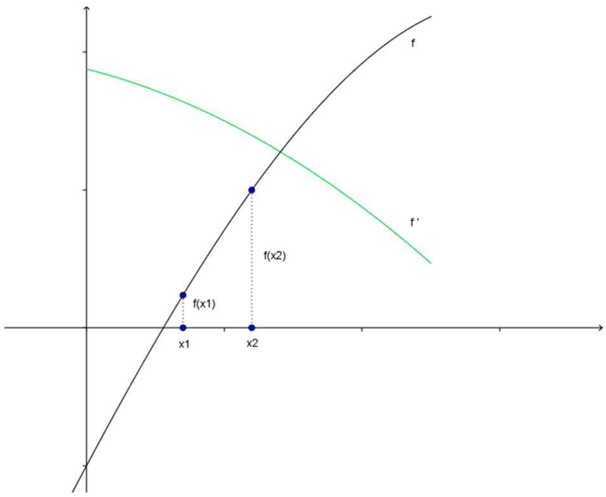
Def.

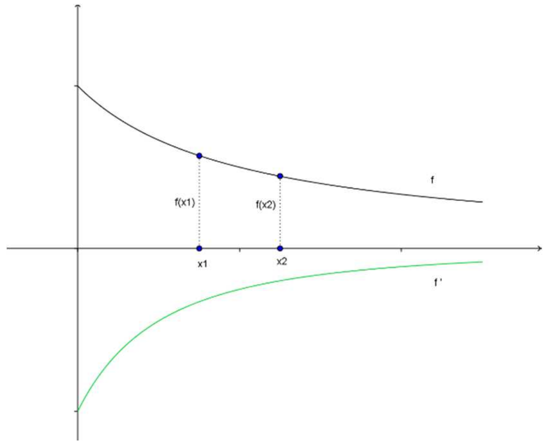
Eine Funktion mit der Gleichung $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad n \in N,\ a_i \in R,\ i = 0,1,2,\ldots n,\ a_n \neq 0$

heisst Polynomfunktion (ganzrationale Funktion), n heisst der Grad des Polynoms.

B:
$f(x) = 2x^3 - x + 3$ ist ein Polynom 3. Grades
Gegenbeispiele:
$f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = e^x$ sind keine Polynome

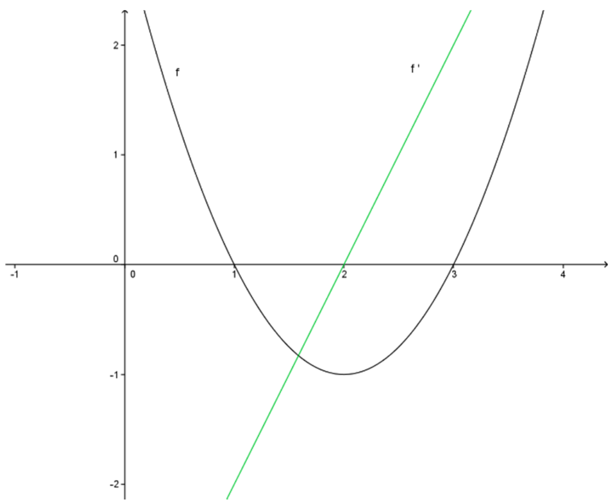
2. Monotonie





Def :
f heisst monoton wachsend in I genau dann wenn für alle $x_1, x_2 \in$ I gilt:
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
f heisst monoton fallend in I genau dann wenn für alle $x_1, x_2 \in$ I gilt:
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ d.h. zum grössern Argument gehört auch der grössere (bzw. kleinere) Funktionswert.

vorbereitende Aufgabe:
Zeichne in einem Koordinatensystem den Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 3$ und den Graphen der 1. Ableitung $f'(x) = 2x - 4$.



Für x < 2 ist die 1. Ableitung $f'(x) < 0$, d.h. in diesem Intervall ist die Tangentensteigung des Graphen negativ. Da die Tangente die lokale Änderungstendenz des Graphen beschreibt, bedeutet dies, dass die Funktion f in diesem Intervall monoton fällt.

Die erste Ableitung gibt also eine Information über das Wachstumsverhalten einer Funktion
.
Allgemein gilt:

Satz 1:
Ist in einem Intervall I $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) dann ist die Funktion f im Intervall I monoton steigend (fallend).

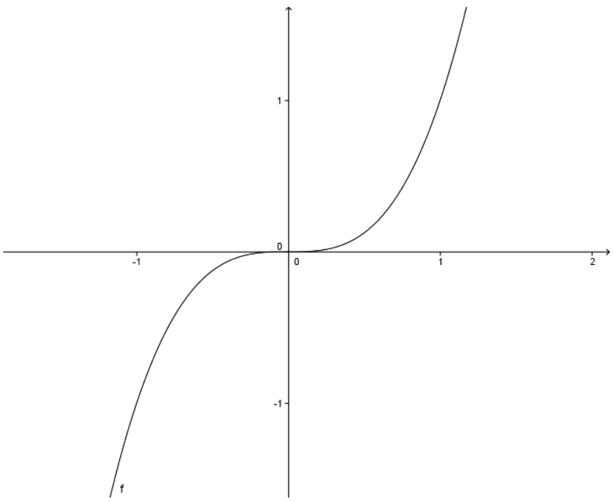
Der Satz ist anschaulich klar: Die Tangente beschreibt lokal das Verhalten der Funktion. Ein exakter Beweis erfordert den sogenannten Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Beweis:
Zu zwei gegebenen Werten $x_2 > x_1$ existiert nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein „Zwischenwert“ x_3 sodass gilt: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_3) > 0$ und damit $f(x_2) - f(x_1) > 0$, woraus die Behauptung folgt.

Physikalische Interpretation von Satz 1:
Ist die 1. Ableitung der Weg-Zeitfunktion positiv, so bedeutet dies, dass die zurückgelegte Strecke mit wachsender Zeit grösser wird d.h. dass das Objekt sich in der als positiv festgelegten Richtung bewegt.

Ist die 1. Ableitung einer Wachstumsfunktion positiv so bedeutet dies eine positive Wachstumsrate (vgl. z.B. Zunahme der Bakterienpopulation).
Ist die 1. Ableitung einer Wachstumsfunktion negativ, so bedeutet dies eine negative Wachstumsrate (vgl. z.B. Zerfallsrate eines radioaktiven Präparats)

Wie das Beispiel der Funktion $f(x) = x^3$ zeigt,
gilt die Umkehrung von Satz 1 gilt nicht.

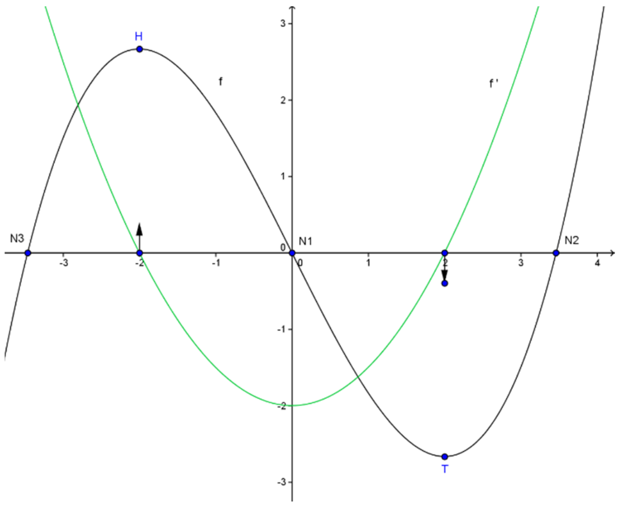


Hingegen gilt:
f fällt im Intervall I $\Rightarrow$ $f'(x) \geq 0$ in I.

Man sagt deshalb, die Bedingung $f'(x) > 0$ auf I ist hinreichend aber nicht notwendig für monotones Wachstum.

Ein wichtiger Spezialfall:
$f'(x) = 0$ in I $\Leftrightarrow$ f ist konstant in I

Aufgabe:
Untersuche das Monotonieverhalten der Funktion f: $f(x)=\frac{1}{6}x\cdot\left(x^2-12\right)$



Der Graph der 1. Ableitung $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(x^2-4\right)$ ist eine nach oben geöffnete Parabel, welche die x-Achse an den Stellen 2 bzw. -2 schneidet. Damit ist $f'(x)<0$ in] -2,2 [und f ist dort monoton fallend. Ausserhalb dieses Intervalls ist $f'(x)>0$, also f monoton wachsend.

An der Stelle x = -2 wechselt die 1. Ableitung das Vorzeichen von + nach -. Nach Satz 1 geht also an dieser Stelle ein Wachstum in ein Fallen über. Die Funktion f hat also bei x = -2 ein lokales Maximum, der Graph einen Hochpunkt $H\left(-2,\frac{8}{3}\right)$

An der Stelle x = 2 wechselt die 1. Ableitung das Vorzeichen von - nach +. Nach Satz 1 geht also an dieser Stelle ein Fallen in ein Wachstum über. Die Funktion f hat also bei x = 2 ein lokales Minimum, der Graph einen Tiefpunkt $T\left(2,-\frac{8}{3}\right)$

Bem.:
Die y-Koordinaten sind die Funktionswerte an den Stellen 2 bzw. -2
Da in der Funktionsgleichung nur ungerade Exponenten vorkommen, sind die Funktionswerte an entgegengesetzten Stellen entgegengesetzt gleich. Der Graph ist damit punktsymmetrisch zum Nullpunkt.
Da der Funktionsterm leicht in Linearfaktoren zerlegt werden kann, ergeben sich die Nullstellen zu $x_1 = 0$, $x_{2,3}=\pm2\sqrt{3}$

Allgemein gilt:

Def.:
Die Funktion f hat an der Stelle x_0 ein lokales Minimum (bzw. der Graph von f einen Tiefpunkt) genau dann wenn für alle x in einer gewissen Umgebung von x_0 gilt $f(x) \geq f(x_0)$.

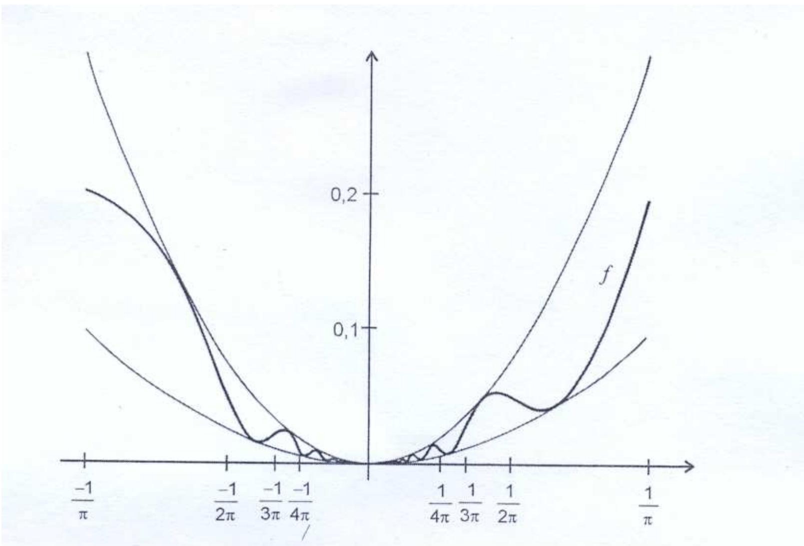
Die Funktion f hat an der Stelle x_0 ein lokales Maximum (bzw. der Graph von f einen Hochpunkt) genau dann, wenn für alle x in einer gewissen Umgebung von x_0 gilt $f(x) \leq f(x_0)$.

Lokale Minima bzw. Maxima heissen auch Extrema.

Satz 2:
Wechselt die 1. Ableitung f ' an der Stelle x_0 das Vorzeichen von - nach + (von + nach -) dann hat f an der Stelle x_0 ein **lokales Minimum** (**lokales Maximum**) und G_f einen **Tiefpunkt** (**Hochpunkt**).

Begründung:
Ist in einer Linksumgebung f ' negativ, so folgt aus Satz 1, dass f dort monoton fällt. Analog folgt, dass f in einer Rechtsumgebung wächst, woraus die Behauptung folgt.

Umgekehrt gilt:
Hat die Funktion f an der Stelle x_0 ein Extremum, dann ist notwendigerweise $f'(x_0) = 0$ (anschaulich: der Graph hat dort eine horizontale Tangente).



Wie das Beispiel der Betragsfunktion zeigt, ist die Differenzierbarkeit der Funktion wesentlich. Die Betragsfunktion hat an der Stelle 0 ein lokales Minimum, ist aber dort nicht differenzierbar.

Das Kriterium ist ist zwar hinreichend aber wie das folgende Beispiel zeigt nicht notwendig.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Je mehr man sich nämlich dem Nullpunkt nähertdesto rascher wechselt die 1. Ableitung das Vorzeichen. Damit kann keine Umgebung von 0 angegeben werde, in der das Vorzeichen ein einheitlich positiv bzw. negativ ist. Trotzdem hat der zwischen zwei Parabeln „eingeklemmte“ Graph an der Stelle 0 einen Tiefpunkt.