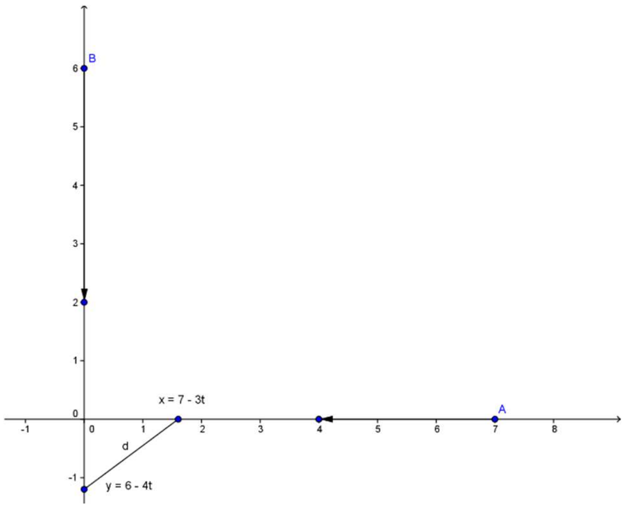
Aufgabe:
Zwei Massenpunkte A und B bewegen sich auf den Koordinatenachsen.
A startet zur Zeit t = 0 in (7,0) mit der Geschwindigkeit $\overrightarrow{v_A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$
B startet zur Zeit t = 0 in (0,6) mit der Geschwindigkeit $\overrightarrow{v_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$
Zu welcher Zeit ist der Abstand der beiden Punkte minimal?



1. Zielfunktion:
Der Abstand d ist genau dann minimal, wenn das Quadrat des Abstands D = d^2 minimal ist.

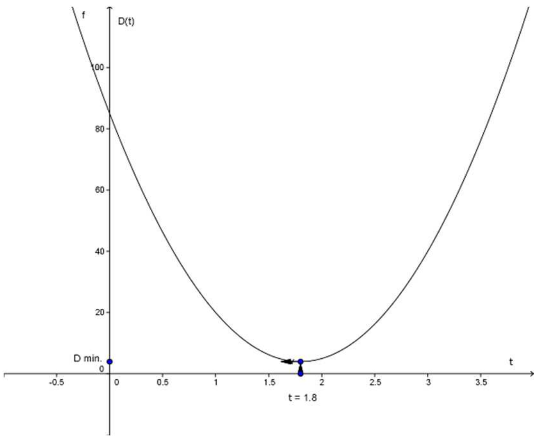
Abstandsquadrat $D = x^2 + y^2$

2. Nebenbedingung
Für die x-Koordinate von A bzw. die y-Koordinate von B zur Zeit t gilt:

$x = 7 - 3t \qquad y = 6 - 4t$

3. Das Abstandsquadrat D ist damit eine Funktion t:

$$D(t) = (7-3t)^2 + (6-4t)^2 \qquad (*)$$
$$= 25t^2 - 90t + 85$$



4. Der Graph von D ist eine nach oben geöffnete Parabel.

$$D'(t) = 2\cdot(7-3t)\cdot(-3) + 2\cdot(6-4t)\cdot(-4) = 50t - 90 = 0$$

Der Abstand wird damit für $t = \frac{9}{5}$ minimal, $D(\frac{9}{5}) = 4$ ist

das minimale Abstandsquadrat ist $D\left(\frac{9}{5}\right) = 4$, der minimale Abstand also d = 2

A befindet sich zu diesem Zeitpunkt bei Punkt ($\frac{8}{5}$,0) und B (0, - $\frac{6}{5}$)

Bem. (*)
Durch das Anwenden der Kettenregel kann das Ausmultiplizieren vermieden werden.

Uebungsaufgabe:
Dem von der Parabel mit der Gleichung y = 4 - x^2 und der x-Achse begrenzten Parabelsegment ist ein Rechteck mit grösstem Inhalt einzubeschreiben.

Lösung:

Zielfunktion: $A(x) = 2\cdot(4x - x^3)$ Das durch den Punkt $P\left(\sqrt{\frac{4}{3}}, \frac{8}{3}\right)$ festgelegte Rechteck hat maximalen Inhalt.