8. Nullstellen von Polynomen

Def.
x_0 heisst Nullstelle der Funktion f $\Leftrightarrow$ $f(x_0)=0$

Bem.:
An einer Nullstelle schneidet oder berührt der Graph einer Funktion die x-Achse.Das Problem, die Nullstellen eines Polynoms zu bestimmen, führt auf eine algebraische Gleichung n. Grades.

Bestimmung der Nullstellen in Spezialfällen:
$f(x)=x^2-2x-3$
Quadratische Auflösungsformel oder faktorisieren $(x-3)\cdot(x+1)=0$ $x_1 = 3$, $x_2 = -1$
$f(x)=x^4-x^2-12$
Biquadratische Gleichung $x^4+x^2-12=(x^2-3)\cdot(x^2+4)=0$ $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$
$f(x)=x^3-6x^2+8x$
Ausklammern! $x\cdot(x-2)\cdot(x-4)=0$ $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$

Ist einmal eine Nullstelle bekannt, dann kann der Grad der Gleichung um 1 reduziert werden. Es gilt nämlich der folgende

Satz:
Ist speziell x_0 eine Nullstelle von f, dann ist $f(x)$ durch $(x-x_0)$ teilbar, d.h. es gilt:
$f(x)=(x-x_0)\cdot g(x)$ mit grad g = grad f - 1

$g(x)$ kann durch Polynomdivision bestimmt werden oder einfacher mit dem sogenannten

Hornerschema

Das Hornerschema ist ein Algorithmus zur Berechnung des Funktionswerts eines Polynoms
Das folgende Beispiel illustriert die Idee:
B
$f(x)=2x^3-3x^2-5x+6=((2x-3)\cdot x-5)\cdot x+6$

2	-3	-5	6	
	6	9	12	$x_0 = 3$
2	3	4	**18**	= f(3)

Das Hornerschema liefert zusätzlich die Darstellung
$f(x)=(x-3)\cdot(2x^2+3x+4)+18$

allg.
Hornerschema für das Polynom $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (1)

a	b	c	d	
	a_1x_0	b_1x_0	c_1x_0	$x = x_0$
a_1	b_1	c_1	d_1	

mit $a_1 = a$, $b_1 = b + x_0a_1$, $c_1 = c + x_0b_1$, $d_1 = d + x_0c_1$ (3)

Behauptung:
$f(x) = (x - x_0) \cdot g(x) + d_1$ mit $g(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ und $f(x_0) = d_1$ (2)

Beweis: durch Ausmultiplizieren von (2) und Koeffizientenvergleich mit (1)

$(x - x_0) \cdot g(x) + d_1 = (x - x_0) \cdot (a_1x^2 + b_1x + c_1)$
Koeffizient von
x^3: $a_1 = a$ wegen (3)
x^2: $b_1 - a_1x_0 = b$ wegen (3)
x^1: $c_1 - b_1x_0 = c$ wegen (3)
x^0: $d_1 - c_1x_0 = d$ wegen (3)

Ergänzung:
Mit dem vollständigen Hornerschema können zusätzlich die Ableitungen berechnet werden.

Die Darstellung (2) ist besonders nützlich, wenn eine Nullstelle von f bekannt ist:

B.:
$f(x) = x^3 - 7x + 6$ $x_1 = 2$ ist Nullstelle.

1	0	-7	6	
	2	4	-6	$x_1 = 2$
1	2	-3	0 = f(2)	

Horner liefert die Darstellung
$f(x) = (x-2)(x^2 + 2x - 3)$
Die beiden restlichen Nullstellen können z.B. mit der quadratischen Auflösungsformel oder durch faktorisieren gefunden werden: $x_2 = 1$, $x_3 = -3$. Damit gilt:
$f(x) = (x-2) \cdot (x+3) \cdot (x-1)$

Satz:
Ist speziell x_0 eine Nullstelle von f, dann ist f(x) durch $(x - x_0)$ teilbar, d.h.
$f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$ mit grad g = grad f - 1

Bem.
Die Koeffizienten von g ergeben sich leicht mit dem Hornerschema

Aufgabe.
Das Polynom f(x) = $3x^3 + 2x^2 - 19x + 6$ hat die Nullstelle -3. Zerlege f(x) in Linearfaktoren.

Das Hornerschema liefert schliesslich die Darstellung
$f(x) = 3(x+3)\cdot(x-2)\cdot(x-\frac{1}{3}) = (x+3)\cdot(x-2)\cdot(3x-1)$

Bem.:
Eine ganzzahlige Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizieneten ist ein Teiler des konstanten Gliedes.

Beweis für ein Polynom 3. Grades:
Vor.:
z sei eine ganzzahlige Nullstelle des Polynoms f
$az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ oder $-d = az^3 + bz^2 + cz$ durch z dividiert
$-\frac{d}{z} = az^2 + bz + c$, wo die rechte Seite nach Vor. ganzzahlig ist.

Uebungsaufgaben:
a)
$f(x) = x^3 - x - 6 = (x-2)\cdot(x^2 + 2x + 3)$
Als ganzzahlige Lösungen kommen die Zahlen ±1, ±2, ±3 in Frage.
Der quadratische Term kann reell nicht in Linearfunktionen zerlegt werden, da die zugehörige Diskriminante negativ ist.
b)
$f(x) = 6x^3 - 73x^2 + 79x - 22 = (x-11)\cdot(2x-1)\cdot(2x-3)$
Als ganzzahlige Lösungen kommen die Zahlen ±1, ±11 in Frage.
c)
c ε R ist so zu bestimmen, dass die Gleichung $2x^3 + x^2 - 3x + c = 0$ die Lösung x1 = -1 hat.
Wie heissen die übrigen Lösungen (Wurzeln stehen lassen)?
Lösung:
c = -2, $x_{2,3} = \frac{1}{4}\cdot(1 \pm \sqrt{17})$

Allgemein gilt (ohne Beweis):
Fundamentalsatz der Algebra:
Ein Polynom n-ten Grades besitzt genau n reelle oder komplexe Nullstellen und es gilt folgende Zerlegung in Linearfaktoren:
$f(x) = a_n \cdot (x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot.....\cdot(x-x_n)$ mit $x_i \in C$

Folgerung:
Ein Polynom n-ten Grades hat insbesondere höchstenbs n reelle Nullstellen. Wie das Beispiel $f(x) = x^2 + 1$ zeigt, gibt es unter Umständen überhaupt keine reellen Nullstellen.

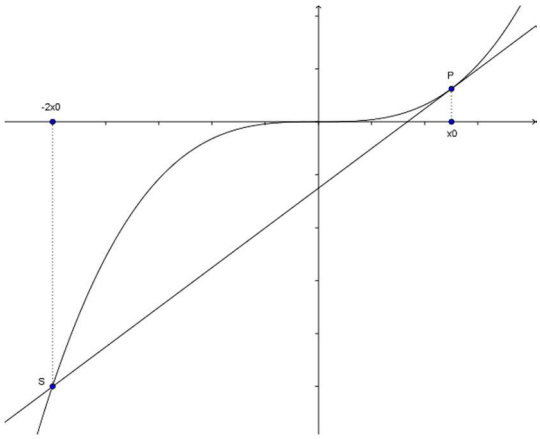
Bem.:
Es können auch zwei oder mehrere Nullstellen übereinstimmen.

B.:
$f(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

Beachte:
Mehrfache Nullstellen sind auch Nullstellen der 1. Ableitung (Beweis mit der Produkt- und Kettenregel). Im Beispiel berührt die Parabel die x-Achse an der Stelle 3.

Aufgabe:
Die Tangente t an die kubische Parabel k: $y = f(x) = x^3$ in einem beliebigen Kurvenpunkt P schneidet k in einem weiteren Punkt S. bestimme die Koordinaten von S.

Skizze: $x_0 = 0.5$



Für die Steigung m der Tangente t gilt:
$m = f'(x_0) = 3x_0^2$
Ansatz für die Tangentengleichung:
t: $y = 3x_0^2 x + q$
P erfüllt die Tangentengleichung:
$x_0^3 = 3x_0^2 \cdot x_0 + q \qquad q = -2x_0^3$
t: $y = 3x_0^2 x - 2x_0^3$
Im Schnittpunkt von t und k gilt:
$x^3 = 3x_0^2 x - 2x_0^3$ bzw. $x^3 - 3x_0^2 x + 2x_0^3 = 0$
Die doppelte Lösung x_0 dieser Gleichung kann nach Horner abgespaltenwerden:

1	0	$-3x_0^2$	$2x_0^3$
	x_0	x_0^2	$-2x_0^3$
1	x_0	$-2x_0^2$	0
	x_0	$2x_0^2$	
1	$2x_0$	0	

Gesuchter Schnittpunkt $Q(-2x_0 / -8x_0^3)$

Ausblick:
Zwar gibt es für Gleichungen 3. und 4. Grades Auflösungsformeln. Sie sind aber in der Praxis kaum von Bedeutung. Wie der Mathematiker Nils Hendrik Abel bewiesen hat, gibt es keine allgemeine Auflösungsformel für Gleichungen von mindestens 5. Grad. In der Praxis hilft man sich mit numerischen Verfahren wie z.B. dem Newtonverfahren.