



B:

$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot (3x - x^3)$$

1. Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1}{6} \cdot (3 - 3x^2) = \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2)$$

$$f''(x) = -x$$

$$f'''(x) = -1$$

2. Nullstellen:

$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot (3x - x^3) = \frac{1}{6} \cdot x \cdot (3 - x^2) = 0$$

Ausklammern!

$$x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}$$

3. Extrema:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2) = 0 \quad x = -1 \text{ oder } x = 1$$

da  $f''(1) = -1 < 0$  hat der Graph eine Rechtskurve, also liegt ein Hochpunkt  $H(1, \frac{1}{3})$  vor.

analog zeigt man an der Stelle -1 liegt ein Tiefpunkt  $T(-1, -\frac{1}{3})$

4. Wendepunkte:

An der Stelle 0 wechselt die 2. Ableitung das Vorzeichen von + nach -, d.h. eine Rechtskurve geht in eine Linkskurve über; also liegt dort ein Wendepunkt  $W(0,0)$  vor.

5. Symmetrie:

Da die Funktionswerte an den Stellen  $x$  und  $-x$  entgegengesetzt gleich sind, ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung.

6. Asymptotisches Verhalten:

Das Verhalten für betragsgrasse  $x$  ist vom Term bestimmt, dessen Exponent am grössten ist. Im Beispiel verhält sich  $f(x)$  asymptotisch wie  $-x^3$ .

7. Skizze:  $-2 < x < 2$

Übungsaufgaben:

a)

$$f(x) = x \cdot (x - 9) \cdot (x - 24)$$

Lösung:

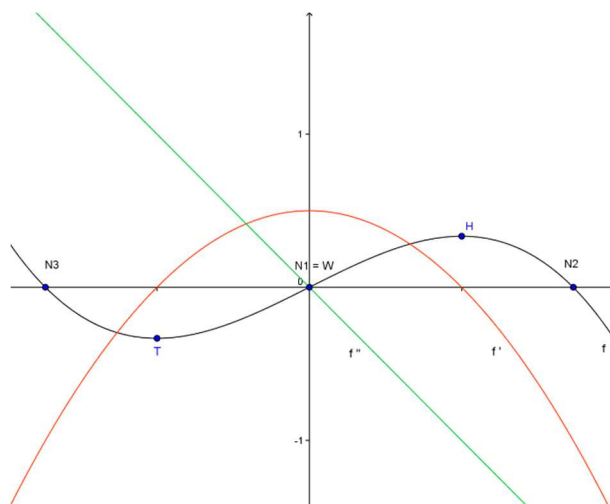
3 ganzzahlige Nullstellen, ganzzahlige Extremalstellen bei  $x = 4$  und  $x = 18$  und ein Wendepunkt an der Stelle  $x = 18$ .

b)

$$f(x) = \frac{1}{4} x \cdot (12 - x^2)$$

c)

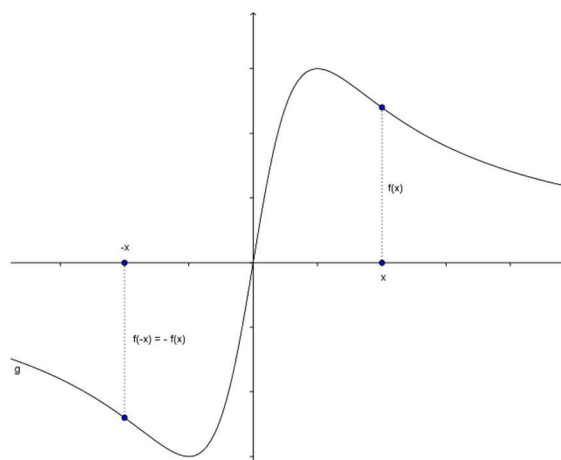
$$f(x) = x^2 \cdot (3 - x)$$



Der Graph einer Funktion  $f$  ist genau dann punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn für alle  $x$  des Definitionsbereichs gilt:  $f(-x) = -f(x)$ .

B:

$$f(x) = \sin x, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$



Für Polynomfunktionen gilt speziell:

Satz:

Kommen in der Funktionsgleichung eines Polynoms nur ungerade Exponenten vor, dann ist der Graph zentralsymmetrisch zum Ursprung.

Begründung:

Ersetzt man  $x$  durch  $-x$ , so, wechselt jeder Summand das Vorzeichen.

Die bisherigen Beispiele lassen vermuten, dass gilt:

Satz: (ohne Beweis)

Der Graph eines Polynoms 3. Grades ist zum Wendepunkt  $W$  symmetrisch.

### Ergänzende Informationen ohne Beweis

Der Graph eines Polynoms vom 3. Grad mit der Gleichung  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  hat einen Wendepunkt mit den Koordinaten  $x_w = -\frac{b}{3a}$  und  $y_w = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$ . Der Graph ist zentralsymmetrisch zum Wendepunkt.

Führt man ein neues Koordinatensystem ein, dessen Ursprung im Wendepunkt liegt, so erhält man als Gleichung der Kurve bezüglich des neuen Koordinatensystems:

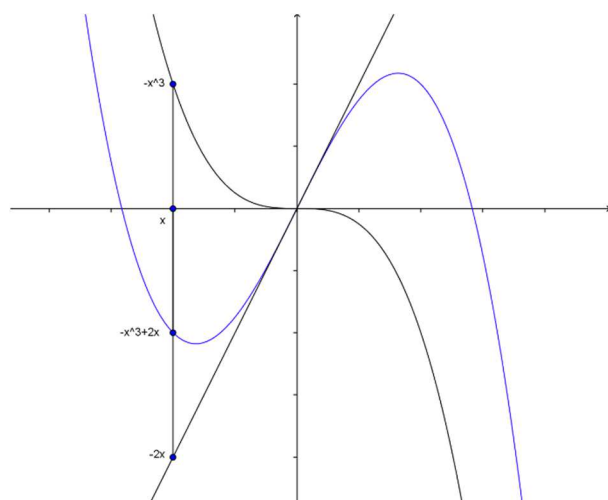
$$\bar{y} = a\bar{x}^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)\bar{x}$$

Der Graph eines Polynoms vom 3. Grad ist also als Überlagerung einer kubischen Parabel mit der Gleichung  $\bar{y} = a\bar{x}^3$  und einer Geraden mit der Gleichung  $\bar{y} = \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)\bar{x}$  aufgefasst werden.

Die verschiedenen Typen des Kurvenverlaufs sind in den folgenden Beispielen dargestellt: Die Vorzeichen der einzelnen Summanden sind mit Berücksichtigung des Vorzeichens zu addieren

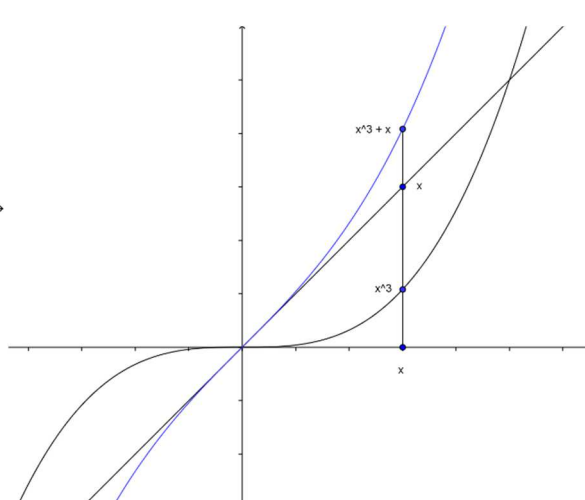
$$a < 0$$

$$B : f(x) = -x^3 + 2x$$



$$a > 0$$

$$B : f(x) = x^3 + x$$



Der Graph eines Polynoms vom 3. Grad verläuft also von links unten nach rechts oben (oder von links oben nach rechts unten) und schneidet wegen der Stetigkeit an mindestens einer Stelle die x-Achse. Ausserdem ist zu erkennen, dass bezüglich der Anzahl Nullstellen gilt:

Satz:

Ein Polynom 3. Grades hat genau eine, genau zwei oder genau drei reelle Nullstellen