

6. Diskussion von Polynomen 4. Grades

B: $f(x) = \frac{1}{6}(x^4 - 6x^2 + 9) = \frac{1}{6}(x^2 - 3)^2$

1. Ableitungen:

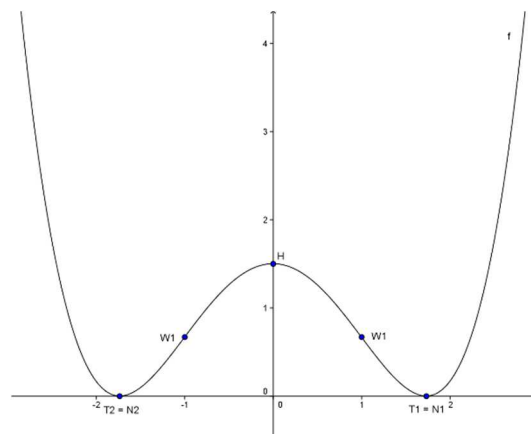
$$f'(x) = \frac{2}{3}x \cdot (x^2 - 3)$$

$$f''(x) = 2 \cdot (x^2 - 1)$$

$$f'''(x) = 4x$$

2. Nullstellen:

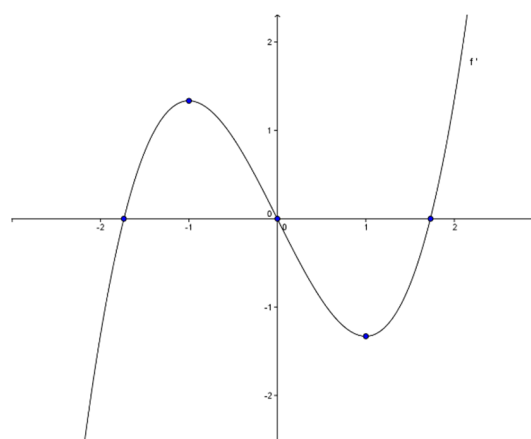
$x_1 = \sqrt{3}$ $x_2 = -\sqrt{3}$, je von 2. Ordnung,
weshalb diese Nullstellen auch Nullstellen
der 1. Ableitung sind.



3. Extrema:

$H(0, \frac{3}{2})$, denn $f''(0) = -2 < 0$ d.h. der Graph hat
eine Rechtskurve (Vorzeichenwechsel von f'
von $-$ nach $+$)

$T_1(\sqrt{3}, 0)$ $T_2(-\sqrt{3}, 0)$, denn $f''(\pm\sqrt{3}) = 4 > 0$,
d.h. der Graph hat eine Linkskurve
(Vorzeichenwechsel von f' von $+$ nach $-$)

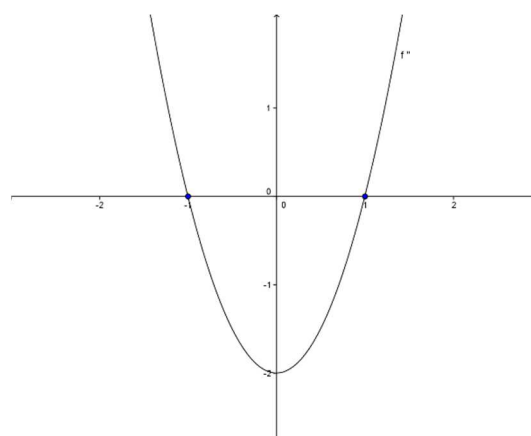


4. Wendepunkte:

$W_{1,2}(\pm 1, \frac{2}{3})$. Die 2. Ableitung wechselt an den
Stellen ± 1 das Vorzeichen (f' hat an den Stellen 1
und -1 ein lokales Minimum bzw. Maximum)

5. Symmetrie:

Wegen $f(-x) = f(x)$ ist der Graph axial-
symmetrisch bezüglich der y-Achse.



6. Asymptotisches Verhalten:

Für betragsgrösse x verhält sich $f(x)$ wie $\frac{1}{6}x^4$

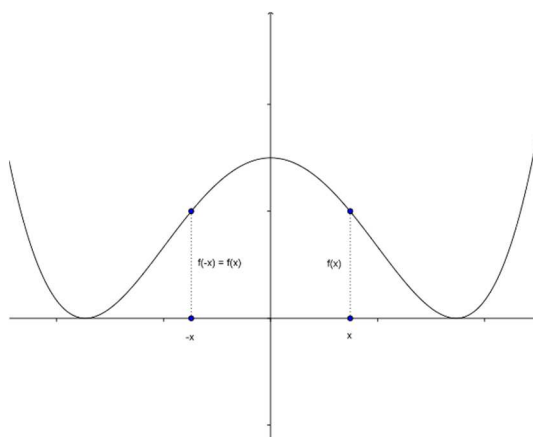
Bezüglich der Axialsymmetrie gilt allgemein:

Def.

Der Graph einer Funktion f heisst axialsymmetrisch zur y -Achse genau dann, wenn für alle x des Definitionsbereichs gilt: $f(-x) = f(x)$. Die Funktion f heisst in diesem Fall gerade.

B:

$f(x) = \cos x$, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ Halbkreisbogen mit Radius 2



Satz:

Kommen in der Funktionsgleichung eines Polynoms nur gerade Exponenten vor, dann ist der Graph axialsymmetrisch zur y -Achse.

Da in der ersten Ableitung ausschliesslich ungerade Exponenten vorkommen, ist der Graph der ersten Ableitung punktsymmetrisch zum Ursprung.

Übungsaufgabe:

$$f(x) = \frac{x^3 \cdot (4-x)}{12}$$

1. Ableitungen:

$$f'(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

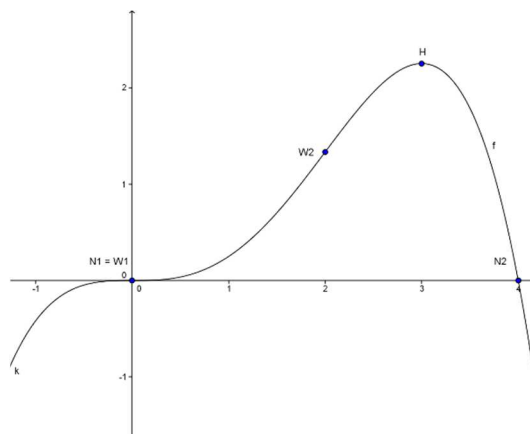
$$f''(x) = 2x - x^2$$

$$f'''(x) = 2 - 2x$$

2. Nullstellen:

$$f(x) = x^3(4-x) = 0 \quad x_{1,2,3} = 0 \quad x_4 = 4$$

Da $x = 0$ dreifache Nullstelle von f ist, hat f' die doppelte Nullstelle $x = 0$ und f'' eine einfache Nullstelle bei $x = 0$.



3. Wendepunkte

$W_1(0,0)$ mit horizontaler Tangente

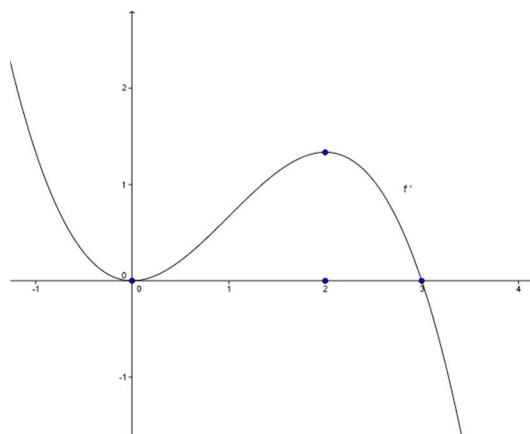
VZW von f'' von - nach +

$$W_2\left(2, \frac{4}{3}\right)$$

VZW von f'' von + nach -

Gleichung der Wendetangente

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$$



4. Extrema

$H\left(3, \frac{9}{4}\right)$ Hochpunkt

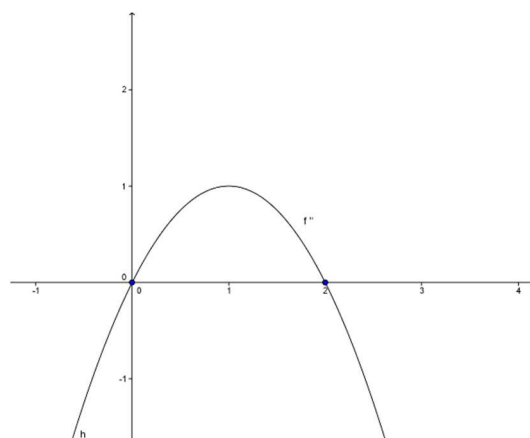
VZW von f' von + nach -

$f''(3) = -3 < 0$. Der Graph G_f hat also in einer Umgebung eine Rechtskurve.

5. Asymptotisches Verhalten:

$$f(x) = \frac{x^4}{12} \left(\frac{4}{x} - 1 \right) \approx -\frac{x^4}{12}$$

Für betragsgrasse s verhält sich f wie die Ersatzfunktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^4$



Übungsaufgabe:

$$f(x) = \frac{1}{12} \cdot (3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 16) = (x-2)^2(3x^2 - 4x - 4)$$

$$N: (-2/3, 0), (2, 0) \quad T(0, -4/3) \quad W(2, 0)$$

7. Asymptotisches Verhalten

Für das Verhalten des Graphen eines Polynoms ist es nützlich, den Verlauf für betragsgrosse x zu kennen. Dazu klammert man das Glied, dessen Exponent am grössten ist aus

$$f(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)$$

Die Klammer hat für $x \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$ den Grenzwert a_n , d.h. für den Verlauf des Polynoms f ist für betragsgrosse x das Glied massgebend, dessen Exponent am grössten ist.

Daraus folgt insbesondere für Polynome ungeraden Grades:

Satz:

Ein Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle.