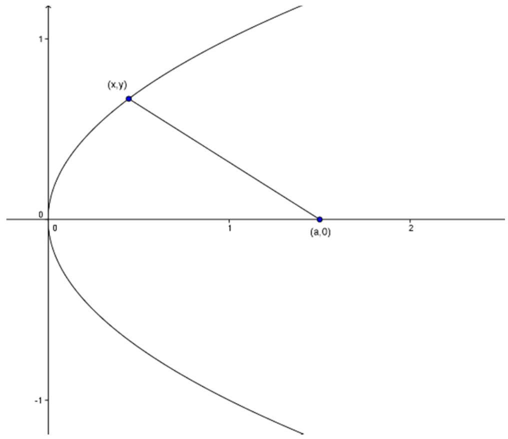
Randextremum

Das folgende Beispiel zeigt, dass das Extremum auch an den Randstellen angenommen werden kann.

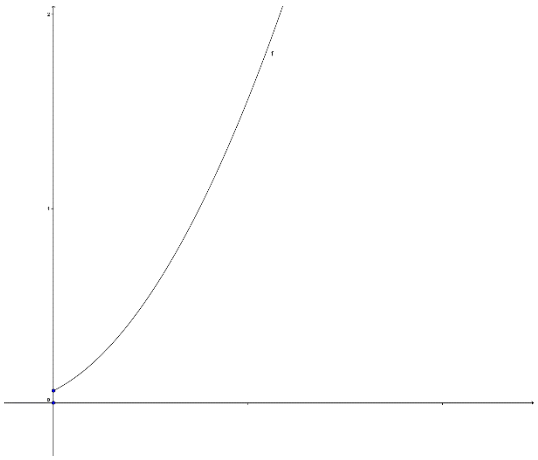
Aufgabe:
Welche Punkte auf der Parabel $y^2 = x$ haben vom Punkt A(a,0) kleinsten Abstand?
Wähle z.B. $a = \frac{1}{4}$ bzw. $a = \frac{3}{2}$



1. Zielfunktion:
Betrachte das Abstandsquadrat $D = (a-x)^2 + y^2$
2. Nebenbedingung:
Die Koordinaten von P erfüllen die Parabelgleichung: $y^2 = x$
3. $D(x) = (a-x)^2 + x \qquad 0 \leq x < \infty$
4. Kandidaten für das Minimum:
Randstelle x = 0! D(0) = a^2
Nullstellen der 1. Ableitung:
$D'(x) = -2 \cdot (a-x) + 1 = 0$

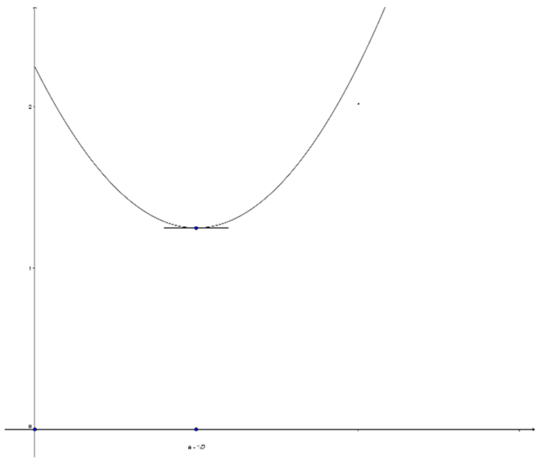
$$x = a - \tfrac{1}{2}$$

Fall $a \leq \frac{1}{2}$



nächster Punkt (0/0)

Fall $a > \frac{1}{2}$



Der Vergleich der Funktionswerte an der Randstelle 0 D(0) = a^2 bzw.an der Nullstelle der 1.Ableitung $D\left(a-\frac{1}{2}\right) = a^2 - \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 < a^2$
ergibt: D(x) wird für x = a - $\frac{1}{2}$ minimal

Ergebnis:
Folgende Punkte der Parabel y = x^2 haben vom P(a,0) kleinsten Abstand:
für $a \leq \frac{1}{2}$: (0,0)
für $a > \frac{1}{2}$: $P\left(a-\frac{1}{2}, \sqrt{a-\frac{1}{2}}\right)$ und $P\left(a-\frac{1}{2}, -\sqrt{a-\frac{1}{2}}\right)$