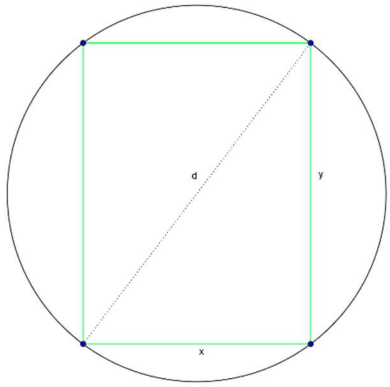
Aufgabe.
Aus einem zylindrischen Holzstamm vom Durchmesser d soll ein Deckenbalken von grösster Tragfähigkeit geschnitten werden. Die Tragfähigkeit T ist bei rechteckigem Querschnitt proportional zur Breite und proportional zum Quadrat der Höhe des Balkenquerschnitts.

1. Zielfunktion:
Die Tragfähigkeit soll maximal werden:
$T = k \cdot xy^2$
2. Nebenbedingung:
$y^2 = d^2 - x^2$
3. $T(x) = k \cdot x \cdot (d^2 - x^2) = k \cdot (d^2 x - x^3) \qquad 0 \leq x \leq d$
4. $T'(x) = k \cdot (d^2 - 3x^2)$

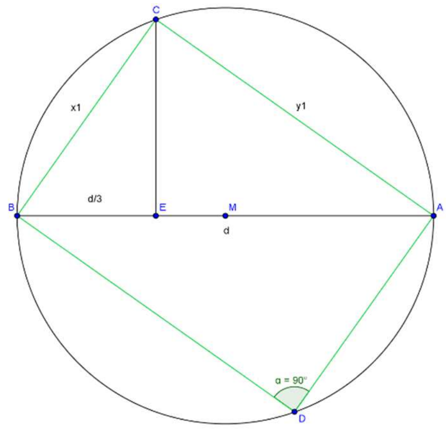
$x = \pm \frac{d}{\sqrt{3}} = \pm \frac{d\sqrt{3}}{3}$



Ergebnis:

Die Tragfähigkeit ist für $x = \frac{d\sqrt{3}}{3}$ maximal.

Geometrisch kann der Querschnitt mit maximaler Tragfähigkeit folgendermassen konstruiert werden (sogenannte Zimmermannregel):



Teile einen Durchmesser des Kreises in drei gleiche Teile.
Errichte in den beiden Teilpunkten die Lote auf dem Durchmesser nach entgegengesetzten Seiten. Ihre Schnittpunkte mit dem Kreis bestimmen eine Diagonale des Rechtecks mit maximaler Tragfläche.

Der Beweis ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BEC und BAC. In den ähnlichen Dreiecken stimmen die Verhältnisse entsprechender Seiten überein:

$\frac{x_1}{d} = \frac{\frac{d}{3}}{x_1} = \frac{d}{3x_1} \quad x = \frac{d\sqrt{3}}{3}$

Graph mit d = 3 und k = $^1/_3$