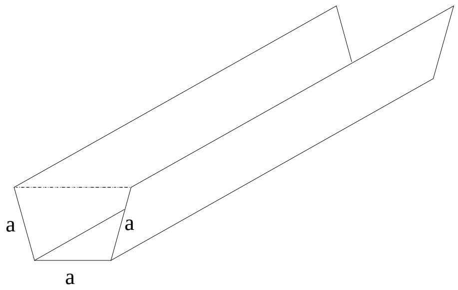
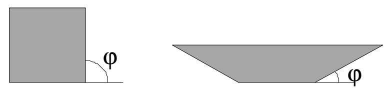
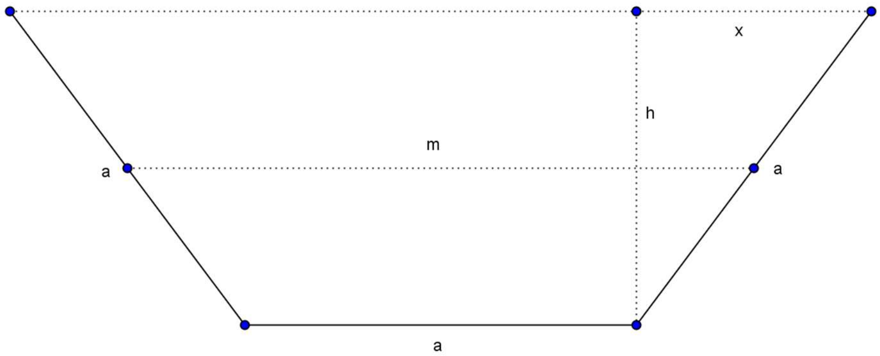
Aufgabe:
Aus drei Brettern der Breite a ist eine offene Wasserrinne mit trapezförmigem Querschnitt so herzustellen, dass sie möglichst viel Wasser führen kann.

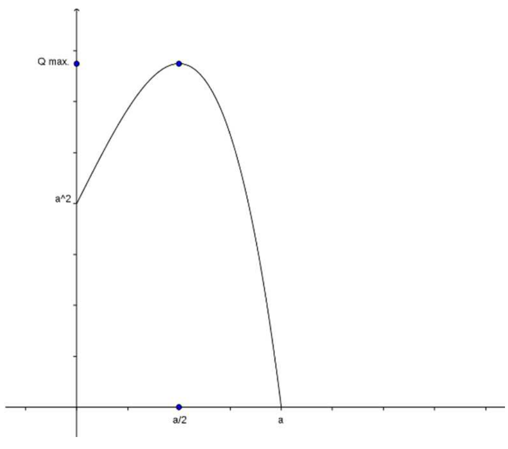




ac



1. Zielfunktion
Der Querschnitt soll maximal sein:
$Q = mh$
2. Nebenbedingung:
Führt man als neue Variable die Teilstrecke x ein, dann gilt:
$m = a + x$ und h = $\sqrt{a^2 - x^2}$
3. $Q(x) = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$
Beim Auftreten von Wurzeln betrachtet man oft das Quadrat des Funktionsterms (der Querschnitt ist genau dann maximal, wenn das Quadrat des Querschnitts maximal ist).
$f(x) = (a + x)^2(a^2 - x^2) = (a + x)^3(a - x) \quad 0 \le x \le a$
4. Die 1. Ableitung kann mit der Produkt- und Kettenregel berechnet werden:



$$f'(x) = 3(a + x)^2(a - x) - (a + x)^3$$
$$= (a + x)^2(3a - 3x - a - x) = 2(a + x)^2(a - 2x) = 0$$

Nullstellen $x = -a$ und $x = \frac{a}{2}$
An den Intervallgrenzen ist die Querschnittsfläche 0 bzw. a^2.
5. Die Querschnittsfläche wird für $x = \frac{a}{2}$ maximal.
$$Q(\tfrac{1}{2}a) = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$