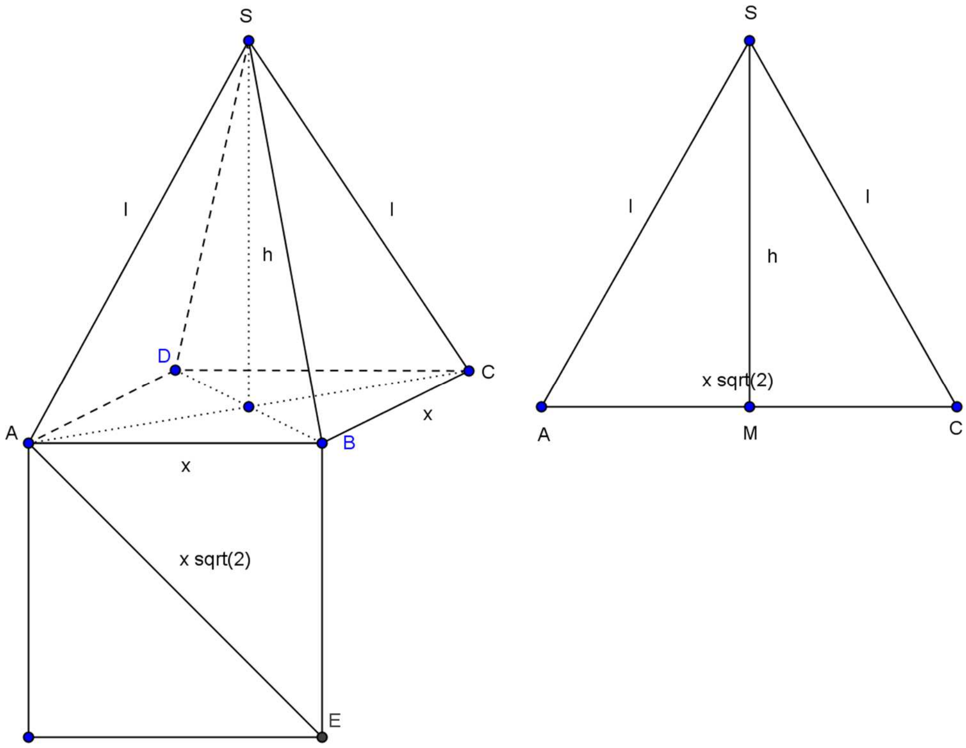
Aufgabe:
Aus 4 Stäben der Länge l ist ein reguläres Pyramidenzelt mit maximalem Volumen zusammenszustellen.

Tip:
Betrachte bei räumlichen Problemen geeignete ebene Schnitte

Schrägriss:




1. Zielfunktion:
Das Volumen soll extremal werden: $V = \frac{1}{3}x^2h$
2. Nebenbedingung:
Nach Pythagoras gilt:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{x^2}{2}$$

$$x^2 = 2\cdot\left(l^2 - h^2\right)$$

3. $V(h) = \frac{2}{3}h\cdot\left(l^2 - h^2\right) \qquad 0 \le h \le l$
Graph: vgl. Beispiel Tragfähigkeit
4. $V'(h) = \frac{2}{3}\left(l^2 - 3h^2\right) = 0$
Da V an den Intervallgrenzen verschwindet
wird das Volumen für $h = \frac{l\sqrt{3}}{3}$ maximal.

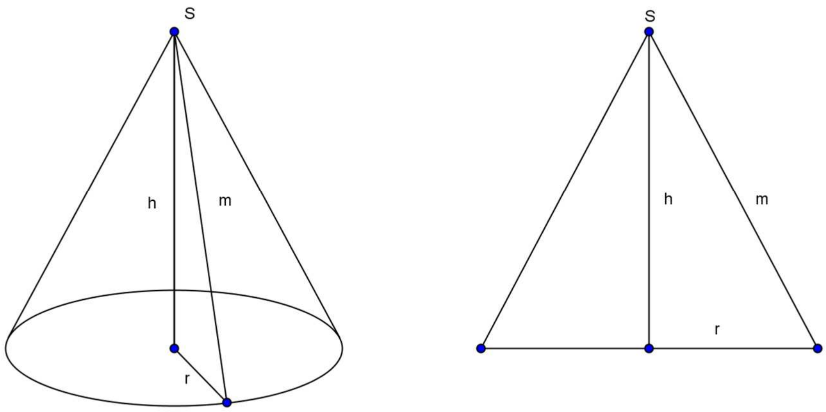
Uebungsaufgaben:

a)
Welchen Bruchteil des Volumens einer Kugel kann ein einbeschriebener Zylinder höchstens ausmachen?
Lösung:
Zielfunktion: $V(h) = \frac{\pi}{4} \cdot \left(4R^2h - h^3\right)$ gesuchter Bruchteil: 57.7%

b)

Welches rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse c = 6 cm erzeugt einen Kegel grössten Inhalts, wenn man es um eine Kathete dreht?
Lösung:
Zielfunktion: $V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot \left(36 - h^2\right)$

Aufgabe:
Aus einem kreisförmigen Stück Papier mit Radius 1 wird ein Sektor ausgeschnitten und daraus eine kegelförmige Tüte gebildet. Für welchen Zentriwinkel mit dem Bogenmass x hat die Tüte maximales Volumen?




1. Zielfunktion:
Das Volumen soll extremal werden:
$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$
2. Nebenbedingungen:
Das Volumen kann als Funktion der Bogenlänge x angegeben werden. Der Umfang des Basiskreises stimmt mit der Bogenlänge des Sektors überein:

$$2\pi r = x \qquad r = \frac{x}{2\pi}$$

Die Kegelhöhe ergibt sich mit dem Pythagoras zu:
$h = \sqrt{1 - r^2}$

3. $V(x) = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2} = \frac{1}{24\pi^2} \cdot x^2 \cdot \sqrt{4\pi^2 - x^2}$

V wird genau dann maximal, wenn das Quadrat von V maximal wird. Ausserdem verändert der konstante Faktor die Extremalstelle nicht. Statt V(x) kann deshalb die folgende einfachere Hilfsfunktion im Intervall [0,2π] betrachtet werden:

$$f(x) = \left(x^2 \cdot \sqrt{4\pi^2 - x^2}\right)^2 = x^4 \cdot \left(4\pi^2 - x^2\right) = 4\pi^2 x^4 - x^6$$

4. $f'(x) = 2x^3 \cdot \left(8\pi^2 - 3x^2\right) = 0$

$$x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm \frac{2\pi}{3} \cdot \sqrt{6} \approx \pm 5.130$$

5. Da f an den Intervallgrenzen verschwindet, wird das Kegelvolumen für den Sektor mit dem Bogenmass 5.13 (Zentriwinkel: 293.9°) maximal.