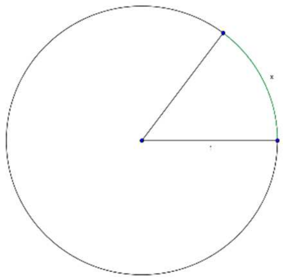
Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen spielen bei der Beschreibung von periodischen Bewegungsabläufen eine wichtige Rolle.

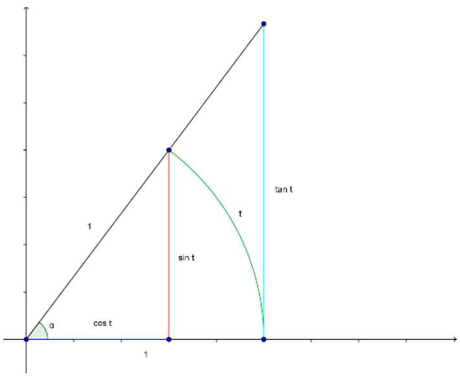
1. Repetition einiger Eigenschaften

Winkel werden in der Mathematik im sogenannten Bogenmass gemessen. Das Bogenmass eines Winkels ist gleich der Länge des zugehörigen Bogens im Einheitskreis.



B:
Der in der Skizze abgebildete 60°-Winkel hat das Bogenmass $\frac{\pi}{3}$.

Def.
Der Sinus eines Winkels ist gerade gleich der y-Koordinate des zugehörigen Punktes im Einheitskreis, der Cosinus gleich der x-Koordinate.



Grundlegende Beziehungen:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (1)$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (2)$$

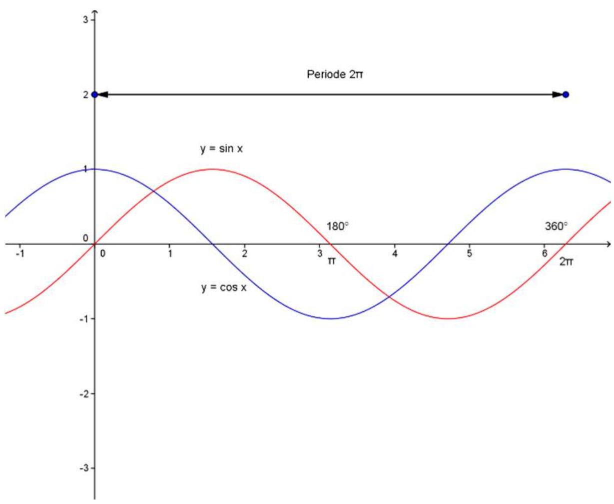
$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1 \qquad (3)$$

Quadrantenrelationen:
Vom Vorzeichen abgesehen stimmen die trigonometrischeen Funktionswerte an den Stellen x (α) , π - x (180° - α), π + x (180° + α), 2π - x (360° - α) überein.

Additionstheoreme:
speziell: $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ und

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

Graphen:



Ableitungen, Stammfunktionen

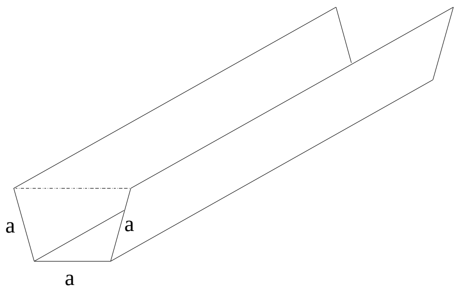
$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

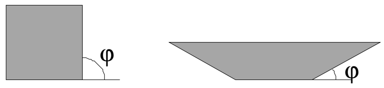
$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

2. Extremalprobleme

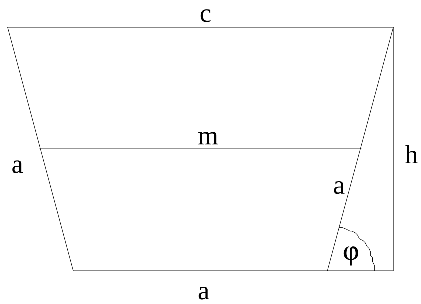
Aufgabe:
Aus drei Brettern der Breite a ist eine offene Wasserrinne mit trapezförmigem Querschnitt so herzustellen, dass sie möglichst viel Wasser führen kann.



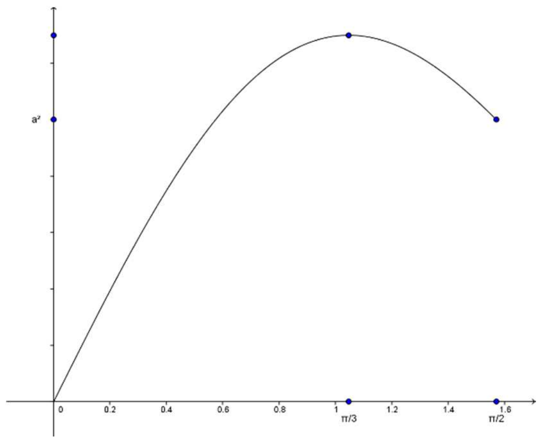


ac

1. Zielfunktion
   Der Querschnitt soll maximal sein
   $Q = mh$



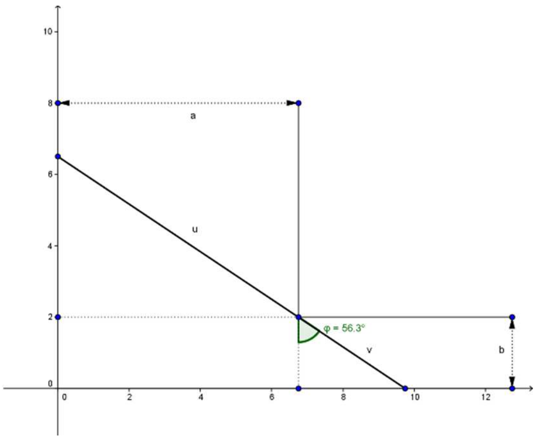
   Führe als Variable einen Winkel ein φ
2. $h = a \cdot \sin\varphi,\; x = a \cdot \cos\varphi$
3. Zielfunktion mit einer Variablen
   $Q(\varphi) = a^2 \cdot \sin\varphi \cdot (1 + \cos\varphi) \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
4. $Q'(\varphi) = a^2 \cdot \left(\cos^2\varphi + \cos\varphi - \sin^2\varphi\right)$
   Wegen $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ kann Q'(φ) in der folgenden Form dargestellt werden:
   $Q'(\varphi) = a^2(2\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1)$
   $= a^2\left(2\cos\varphi - 1\right) \cdot \left(\cos\varphi + 1\right) = 0$
   Nullstellen der 1. Ableitung:
   $\cos\varphi = \frac{1}{2} \qquad \varphi = \frac{\pi}{3}$
   cos φ = -1 (ausserhalb des Intervalls)
   Vergleich der Funktionswerte:
   Q(0) = 0 $\quad Q\left(\frac{\pi}{2}\right) = a^2 \quad Q\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$



Ergebnis:
Das Fassungsvermögen der Wasserrinne wird für φ = $\pi/3$ maximal.

Uebungsaufgabe:
Welches rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse c = 6 cm erzeugt einen Kegel grössten Inhalts, wenn man es um eine Kathete dreht?

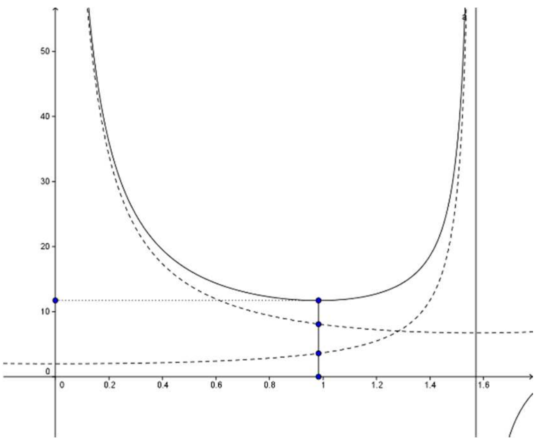
Aufgabe:
Zwei Korridore von a = 6.75 m und b = 2 m Breite stossen rechtwinklig aneinander. Wie lange darf eine Stange höchstens sein, wenn sie horizontal um die von den Korridoren gebildete Ecke transportiert werden soll?



1. Zielfunktion:
   Länge der Stange $L = u + v$
2. Nebenbedingungen:
   $\frac{a}{u} = \sin\varphi \qquad \frac{b}{v} = \cos\varphi$

   $u = \frac{a}{\sin\varphi} \qquad v = \frac{b}{\cos\varphi}$
3. Zielfunktion in einer Variablen:
   $L(\varphi) = \frac{a}{\sin\varphi} + \frac{b}{\cos\varphi} \qquad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

L gibt für einen bestimmten Winkel, die Länge der für diesen Winkel maximal mögliche Leiterlänge an. Gesucht ist der Winkel mit der grössten Einschränkung für den also die Länge L(φ) minimal ist.



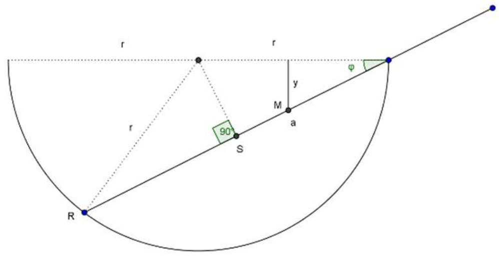
4. $L'(\varphi) = -\frac{a\cdot\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{b\cdot\sin\varphi}{\cos\varphi} = 0$

   $\frac{\sin^3\varphi}{\cos^3\varphi} = \tan^3\varphi = \frac{a}{b}$

   $\tan\varphi = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1.50 \qquad \varphi \approx 56.3°$

Ergebnis:
Die Stange kann eine Länge von maximal 11.7 m haben.

Übungsaufgabe:
In eine innen halbkugelförmige Schale mit Radius r wird ein Stäbchen der Länge a gelegt ($2r \le a \le 4r$). Bei welcher Lage des Stäbchens liegt sein Mittelpunkt am tiefsten. Wähle a = 2r bzw a = 4r.



Lösung:

$\overline{SR} = r \cdot \cos\varphi$

$\overline{OM} = 2\overline{SR} - \frac{1}{2}a = 2r \cdot \cos\varphi - \frac{1}{2}a$

$y = \overline{OM} \cdot \sin\varphi = (2r \cdot \cos\varphi - \frac{1}{2}a) \cdot \sin\varphi$

$y' = 4r\cos^2\varphi - \frac{1}{2}a \cdot \cos\varphi - 2r = 0$

$\cos\varphi = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + 128r^2}}{16r}$

a < 2r	Stäbchen in horizontaler Lage	
a = 2r	φ = 32.5°	y = 0.3690 r
a = 3r	φ = 23.2°	y = 0.1332 r
a > 4r	Stäbchen kippt nach aussen	

3. Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen