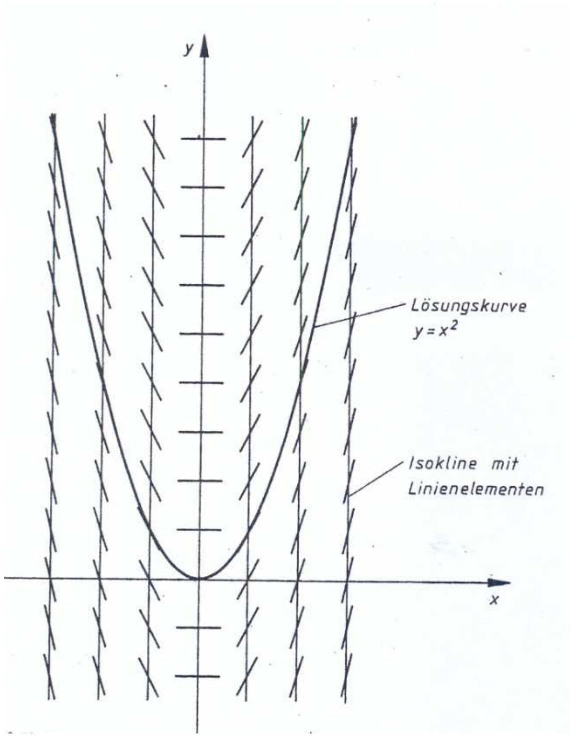
2. Explizite Differentialgleichungen 1. Ordnung, Richtungsfelder

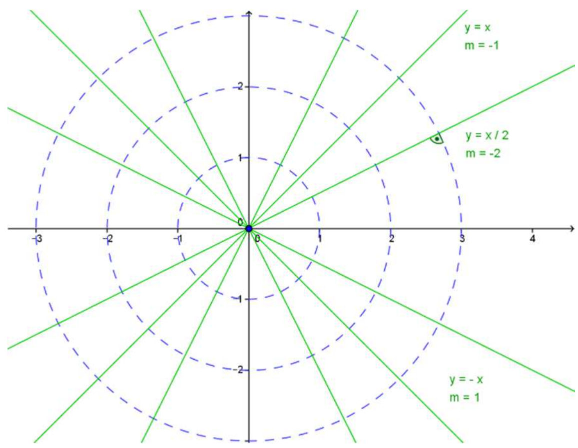
Differentialgleichungen vom Typ y' = F(x, y) heissen explizite Differential-
gleichungen 1. Ordnung.

Geometrische Interpretation:
Durch die Differentialgleichung wird jedem Punkt $P(x, y)$ eine Richtung zugeordnet, d.h. die Differentialgleichung legt ein sogenanntes Richtungsfeld fest. Dieses Richtungsfeld lässt sich am einfachsten aus den Kurven, auf denen die Richtungen einen konstanten Wert haben, den sogenannten **Isoklinen** finden. Die Gleichung der Isokline mit der Steigung m lautet: $m = F(x, y)$. Eine Lösung der Differentialgleichung. kann nun graphisch gefunden werden, indem man eine Kurve möglichst genau in dieses Richtungsfeld einpasst. Es kann bewiesen werden dass es unter gewissen Voraussetzungen durch jeden Punkt des betrachteten Gebiets genau eine Kurve gibt. Die Lösungskurven einer solchen Differentialgleichung bilden eine einparametrige Kurvenschar.

Beispiele:
a)
$y' = 2x$
Isoklinen sind Parallelen zur y-Achse
die Lösungskurven sind Parabeln $y = x^2 + c$



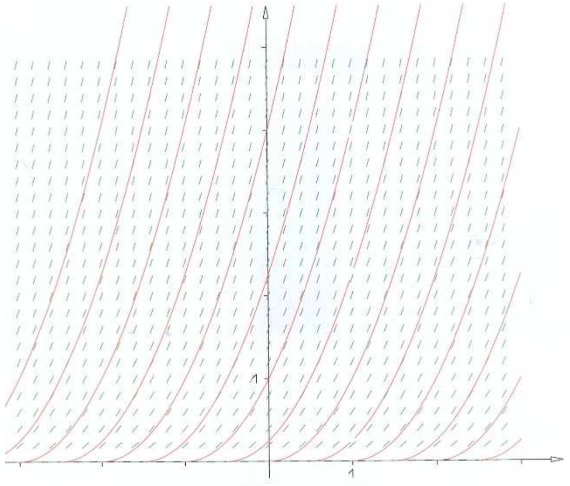
b)
$y \cdot y' = -x$
Isoklinen sind Geraden mit der Gleichung
$y \cdot m = -x$
bzw. die x-Achse und die Ursprungsgeraden
$y = -\frac{1}{m} \cdot x$.
Die Lösungskurven sind also Kreise um den Ursprung, denn sie stehen auf diesen Geraden senkrecht.



c)

$y' = 2 \cdot \sqrt{y}$

Isoklinen sind Geraden mit der Gleichung $m = 2 \cdot \sqrt{y}$ oder $y = \frac{1}{4} \cdot m^2$ also Parallelen zur x-Achse. Im Kapitel Separation wird gezeigt, dass die Kurvenschar die Gleichung $y = (x-c)^2 \quad x \geq c$ hat.



d)

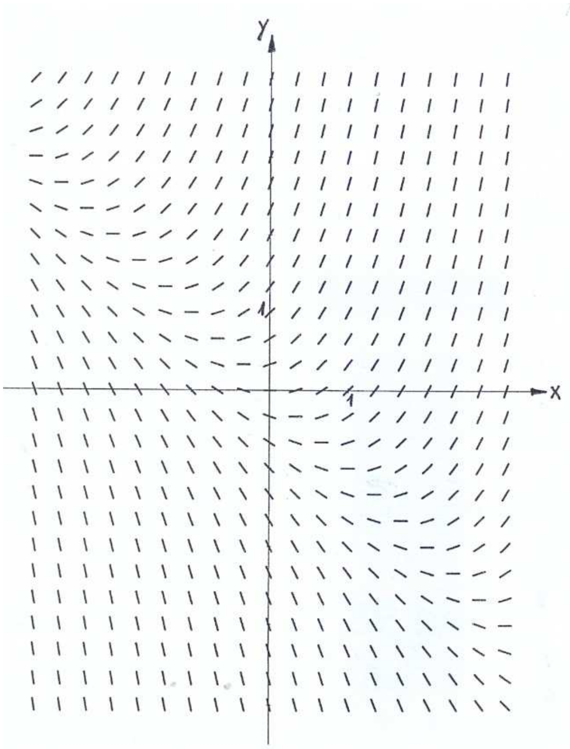
$y' = x + y$

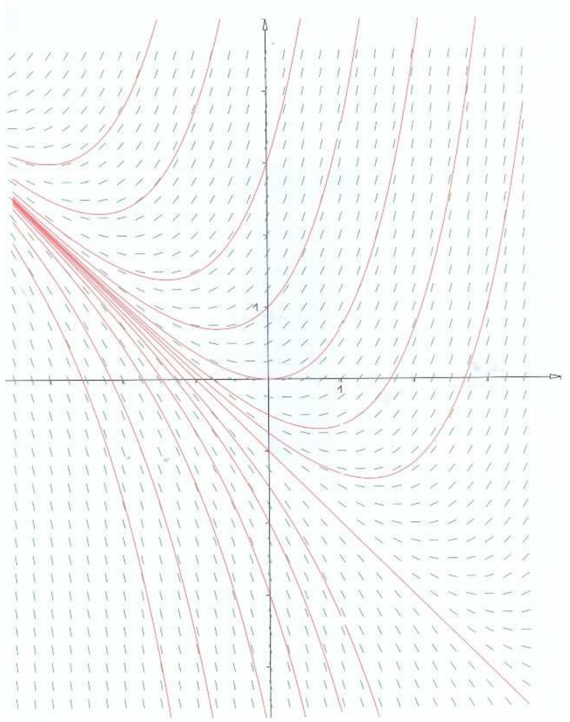
Isoklinen sind Geraden mit der Gleichung $x + y = c$ bzw. $y = -x + c$

Die Lösungskurven sind in dieses Richtungsfeld einzupassen.

Im Abschnitt lineare Differentialgleichung 1. Ordnung wird gezeigt: Die Gleichung der Kurvenschar lautet:

$y = c \cdot e^x - x - 1$





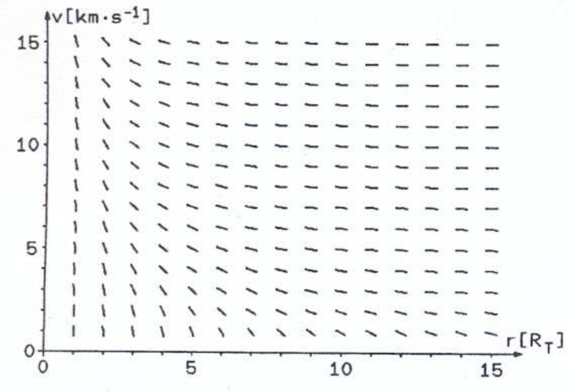
(ac)

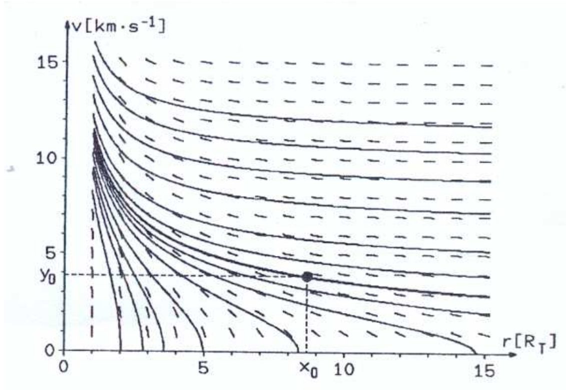
e)

$$v' = \frac{G \cdot M}{v \cdot r^2}$$

Die Gleichung der Isoklinen lautet $m = \frac{G \cdot M}{v \cdot r^2}$ oder $v = \frac{G \cdot M}{m \cdot r^2}$

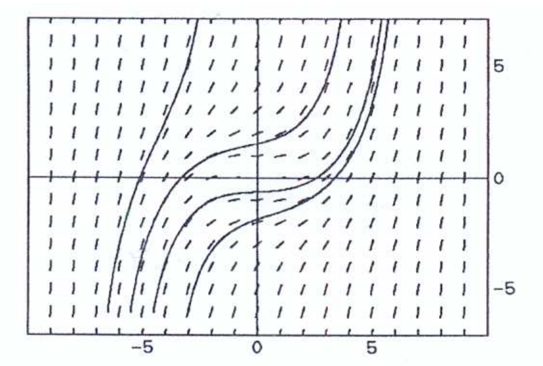
Die Lösungskurven sind in dieses Richtungsfeld einzupassen.





Beim folgenden Beispiel ist es zwar möglich, das Richtungsfeld und die Lösungskurvenschar näherungsweise zu zeichnen. Eine explizite Lösung ist hingegen nicht bekannt bzw. existiert nicht.

$$y' = \tfrac{1}{10} \cdot \left(x^2 + y^2\right)$$



Bemerkung:

Im Abschnitt 5. „Kurvenscharen, orthogonale Trajektorien“ wird gezeigt, dass i.a. umgekehrt jeder einparametrigen Kurvenschar eine Differentialgleichung 1. Ordnung entspricht.