3. Separation der Variablen

In den folgenden Abschnitten werden Typen von Differentialgleichungen behandelt, die elementar gelöst werden können. Ihre Lösung kann auf endlich viele Integrationen zurückgeführt werden. Die elementar lösbaren Differentialgleichungen bilden eine Minderheit unter den gewöhnlichen Differentialgleichungen, aber sie treten in Anwendungen besonders häufig auf.

Differentialgleichungen vom Typ $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$ g(y) ≠ 0 können mit dem folgenden wichtigen Lösungsverfahren „Separation (Trennung) der Variablen" schrittweise gelöst werden.

Ein einführendes Beispiel:

$$y' = -\frac{x}{y}$$

1. Schritt: y' wird durch den „Quotienten" $\frac{dy}{dx}$ ersetzt: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.
2. Schritt: Die Variablen werden getrennt: $y \cdot dy = -f(x) \cdot dx$.
3. Schritt: Beide Seiten werden nach der durch das Differential bezeichneten Variablen integriert:
   $\int y \cdot dy = -\int x \cdot dx$
   Lösungsschar:
   $\frac{1}{2} \cdot y^2 = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + c'$ oder $x^2 + y^2 = 2c'$ bzw. $x^2 + y^2 = r^2$

Allgemeine Lösung ist die Schar der Ursprungskreise mit Radius r.
Spezielle Lösung mit y(0) = 5 ist $x^2 + y^2 = 5^2$

Bemerkung:
In einigen Fällen treten triviale Lösungen mit y‘ = 0 auf.

Begründung des Verfahrens:
Gesucht ist die durch den Punkt (x_0, y_0) gehende Lösungskurve dieser Differentialgleichung.
Ist y = y(x) die Gleichung der gesuchten Lösungskurve dann gilt:

$y'(x) = \frac{f(x)}{g(y(x))}$ und $y(x_0) = y_0$ oder umgeformt:

$g(y(x)) \cdot y'(x) = f(x)$ und daraus

$$\int_{x_0}^{x} g(y(x)) \cdot y'(x) \cdot dx = \int_{x_0}^{x} f(x) \cdot dx.$$

Nach der Integralregel „Substitution 1. Art" kann das Integral auf der linken Seite umgeformt werden:

$$\int_{y_0}^{y} g(y) \cdot dy = \int_{x_0}^{x} f(x) \cdot dx$$

Ist G eine Stammfunktion von g und F eine Stammfunktion von f dann folgt:
$G(y) - G(y_0) = F(x) - F(y_0)$ oder $G(y) = F(x) + (G(y_0) - F(y_0))$
Der Term in der Klammer ist eine Konstante, die von der Anfangsbedingung abhängt.

Die allgemeine Lösung hat also die Form:

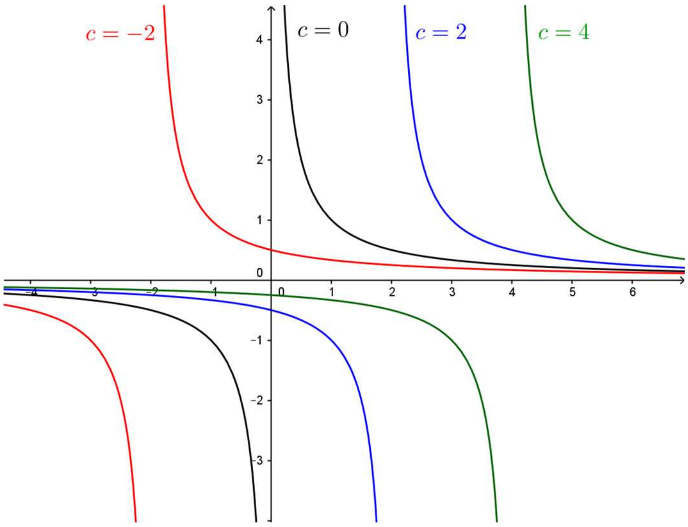
$G(y) = F(x) + c$

Der Scharparameter ist durch die Anfangsbedingung festgelegt.

Beispiele:

a)

$y' = -y^2$ spezielle Lösung y = 0



1. $\frac{dy}{dx} = -y^2$

2. $-\frac{dy}{y^2} = dx$

3. $\int -\frac{dy}{y^2} = \int dx$

$\frac{1}{y} = x + c$

oder umgeformt

$y = \frac{1}{x+c}$

Lösung: Hyperbelschar

Die spezielle Lösung mit der Anfangsbedingung y(3) = 1 heisst wegen

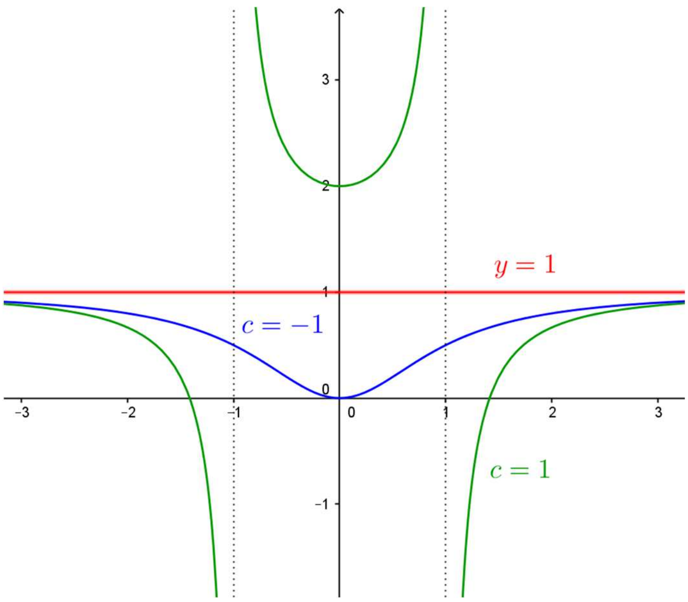
$1 = \frac{1}{3+c}$

$y = \frac{1}{x-3}$

b)

$y' = 2x \cdot (y-1)^2$

spezielle Lösung: y = 1



1. $\frac{dy}{dx} = 2x \cdot (y-1)^2$

2. $\frac{dy}{(y-1)^2} = 2x \cdot dx$

3. $-\int \frac{dy}{(y-1)^2} = -\int 2x \cdot dx$

$\frac{1}{y-1} = -x^2 + c$

oder umgeformt

$y - 1 = \frac{1}{c - x^2}$ oder $y = 1 + \frac{1}{c - x^2}$

In der Abbildung sind die Kurven der Schar mit c = 1 bzw. -1 und die spezielle Lösung y = 1 dargestellt.

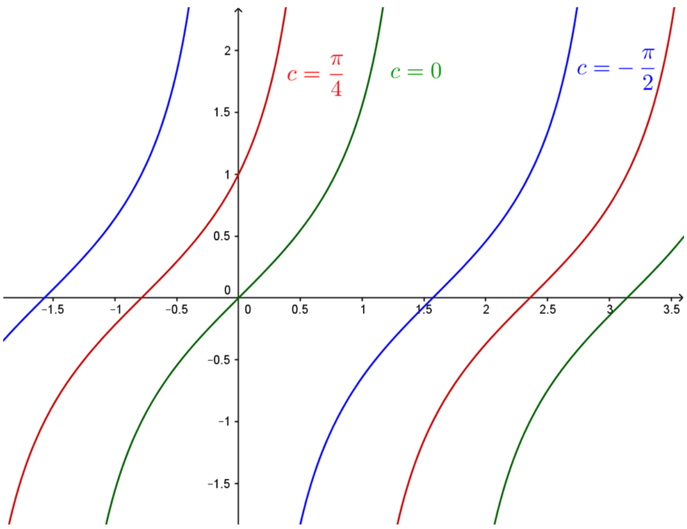
c)

$y' - y^2 - 1 = 0$

1. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + 1$
2. $\dfrac{dy}{y^2 + 1} = dx$
3. $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int dx$

$\arctan y = x + c$ oder umgeformt

$y = \tan(x + c)$



d)

$y' = y \cdot (y + 1)$ Mit y(0) = 1

1. $\dfrac{dy}{dx} = y \cdot (y + 1)$

singuläre Lösungen $y = 0$ und $y = -1$

2. $\dfrac{dy}{y \cdot (y + 1)} = dx$

es gilt die Partialbruchzerlegung

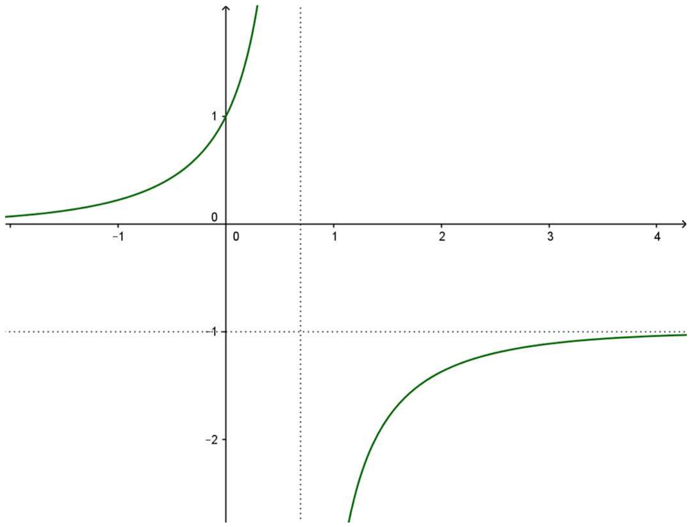
$$\frac{1}{y \cdot (y + 1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y + 1}$$

3. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y + 1} \right) dy = \int dx$

$$\ln|y| - \ln|y + 1| = \ln\left|\frac{y}{y + 1}\right| = x + c_1$$

$$\left|\frac{y}{y + 1}\right| = e^{x + c_1} = e^x \cdot e^{c_1}$$

$$\frac{y}{y + 1} = c \cdot e^x \qquad y = \frac{c \cdot e^x}{1 - c \cdot e^x}$$



Wegen $y(0) = 1$ folgt $y(0) = \dfrac{c}{1 - c} = 1$ und daraus $c = \frac{1}{2}$.

Als spezielle Lösung ergibt sich damit:

$$y = \frac{\frac{1}{2} \cdot e^x}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^x} = \frac{e^x}{2 - e^x}$$

Wie das folgende Beispiel zeigt, kann die Lösung nicht in jedem Fall in der expliziten Form angegeben werden:

$y' = \frac{2x}{1+\cos y}$

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+\cos y}$
2. $(1+\cos y)\cdot dy = 2x \cdot dx$
3. $\int (1+\cos y)\cdot dy = \int 2x \cdot dx$

   $y + \sin y = x^2 + c$

Übungsaufgaben:

a) $y' = (1-y)^2$ allgemeine Lösung: $y = \frac{x+c-1}{x+c}$

b) $x^2 y' - y^2 = 0$ allgemeine Lösung: $y = \frac{x}{1+cx}$

c) $x \cdot y' + y^2 = 0$ allgemeine Lösung: $y = \frac{1}{\ln|x| + c}$

d) $y' = \sqrt{y} \quad y \geq 0$ allgemeine Lösung: $y = \frac{1}{4} \cdot (x+c)^2$