Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Es handelt sich um Differentialgleichungen des Typs:

$y'' + ay' + by = g(x)$ mit a, b ∈ R
die Funktion g(x) heisst Störung.

Zunächst wird der homogene Fall mit g(x) = 0 behandelt.

Aus der Theorie ist bekannt, dass die allgemeine Lösung als Linearkombination zweier Basislösungen dargestellt werden kann. Diese Basislösungen können mit dem Ansatz $y = e^{\lambda x}$ gefunden werden.
Setzt man diesen Ansatz die Differentialgleichung ein, so führt dies auf
$e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right) = 0$ und damit auf
$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
die sogenannte charakteristische Gleichung.
Für ihre Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ sind die folgenden drei Fälle möglich:

1) D > 0 zwei verschiedene reelle Eigenwerte
2) D = 0 genau ein reeller Eigenwert
3) D < 0 zwei konjugiert komplexe Eigenwerte.

Beispiel zu 1)
y'' - y' - 2y = 0
charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$
Lösungen: $\lambda_1 = 2$ bzw. $\lambda_2 = -1$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist eine Linearkombination der beiden Basislösungen:
$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$
Für eine spezielle Lösung sind die Konstanten c_1 und c_2 so zu bestimmen, dass die Anfangsbedingungen $y(x_0) = a_1$ und $y'(x_0) = a_2$ erfüllt sind.

Beispiel zu 2)
y'' - 8y' + 16y = 0
charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ hat die Lösung: $\lambda = 4$.
Damit ist $y = e^{4x}$ eine Lösung der Differentialgleichung.
Eine zweite Lösung erhält man durch Variation der Konstanten:
Setzt man den Ansatz $y = c(x)e^{4x}$ in die Differentialgleichung ein, so führt dies wegen $D = b^2 - 4ac = 0$ auf die besonders einfache Gleichung $c''(x) = 0$ mit der Lösung
$c(x) = c_1 \cdot x + c_2$
Die allgemeine Lösung heisst somit:
$y = (c_1 \cdot x + c_2) \cdot e^{4x} = c_1 \cdot e^{4x} + c_2 x \cdot e^{4x}$ $c_1, c_2 \in$ R

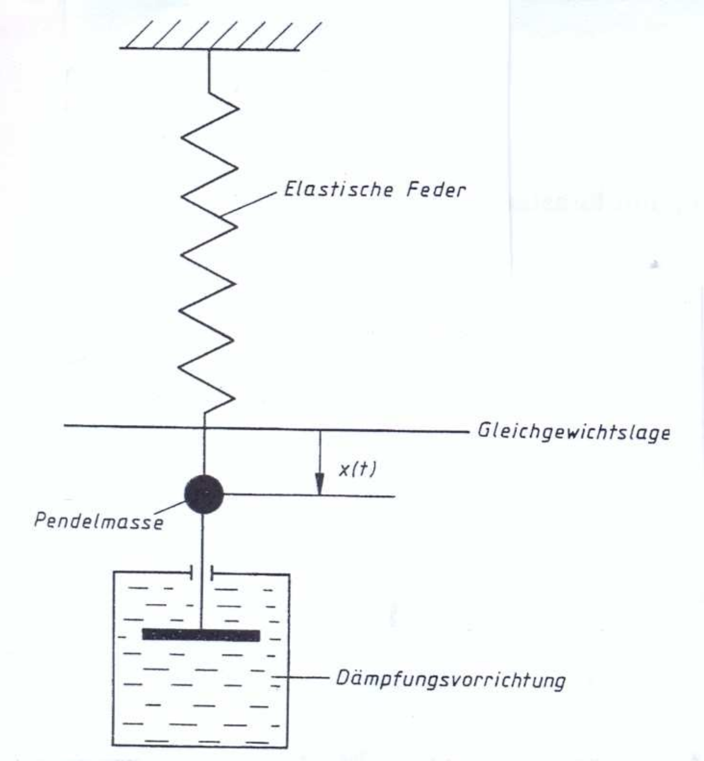
Beispiel zu 3)
y'' + 4y' + 13y = 0
In diesem Fall hat die charakteristische Gleichung
$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ die Diskriminante D = -9 und die zwei konjugiert komplexen Lösungen
$\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$
Mit der Eulerschen Formeln
$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$
können die (komplexen) Lösungen der Differentialgleichung zunächst in der Form
$y = k_1 e^{(-2+3i)x} + k_2 e^{(-2-3i)x} = e^{-2x}\left(c_1 \cdot \cos(3x) + i \cdot c_2 \cdot \sin(3x)\right)$
wobei $c_1 = k_1 + k_2$ und $c_2 = k_1 - k_2$
angegeben werden. Da sowohl Real- als auch Imaginärteil Lösungen des Differential-gleichung sind, kann die allgemeine Lösung in der folgenden Form dargestellt werden:

$$y = e^{-2x}\left(c_1 \cdot \cos(3x) + c_2 \cdot \sin(3x)\right) \qquad c_1, c_2 \in \mathrm{R}$$

Differentialgleichungen dieses Typs treten bei der Behandlung von mechanischen oder elektromagnetischen Schwingungen auf.

Das Federpendel als Beispiel in der Mechanik (Der harmonische Oszillator)

Ein an einer elastischen Feder hängender Körper der Masse m wird aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt. Anschliessend wird er losgelassen. Die Auslenkung aus der Ruhelage zur Zeit t wird mit y(t) bezeichnet. Gesucht ist das Weg-Zeitgesetz dieser Bewegung.



Auf die Masse m wirken folgende Kräfte:
1.
Die zur Auslenkung y proportionale Rückstellkraft F_1 für die nach dem Hookeschen Gesetz gilt:
$F_1 = -D \cdot y$ wobei D > 0 die Federkonstante bezeichnet.
2.
Die zur Geschwindigkeit $v = \dot{y}$ proportionale Reibungskraft, die der Bewegung entgegen wirkt:
$F_2 = -b \cdot v = -b \cdot \dot{y}$ b Dämpfungskonstante

Nach dem Grundgesetz der Mechanik F = m·a gilt damit:
$ma = F_1 + F_2 = -D \cdot y - b \cdot \dot{y}$ oder
$m \cdot \ddot{y} = -b \cdot \dot{y} - D \cdot y$ oder
$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + D \cdot y = 0$
oder nach Division durch m
$$\ddot{y} + + \frac{b}{m} \dot{y} + \frac{D}{m} \cdot y = 0$$
Setzt man $\omega_0^2 = \dfrac{D}{m}$ und $2\delta = \dfrac{b}{m}$ so erhält man
$\ddot{y} + +2\delta \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0$ (1) Gleichung einer freien Schwingung
δ heisst Dämpfungskonstante, ω_0 Eigenfrequenz

Tritt zusätzlich eine von aussen wirkende, zeitabhängige Kraft F(t) ein, dann gilt:
$m \cdot \ddot{y} + D \cdot y + b \cdot \dot{y} = F(t)$ (2) Gleichung einer erzwungenen Schwingung

Zunächst werden Spezialfälle von freien Schwingungen betrachtet:

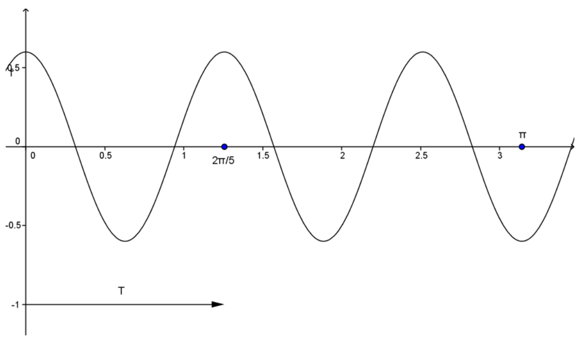
Freie ungedämpfte Schwingung (b = 0)

In diesem Fall vereinfacht sich Gleichung (1) zu
$\ddot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0$
Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet in diesem Fall
$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ und hat die Lösungen $\lambda_{1,2} = \pm i \cdot \omega_0$
Die allgemeine Lösung ist damit eine Linearkombination der beiden Basislösungen und lautet damit
$y(t) = c_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + c_2 \cdot \sin(\omega_0 t)$
Sie kann auch in der folgenden Form dargestellt werden:
$y(t) = c \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$
Wegen $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ gilt für die Schwingungsdauer (Periode)
$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$

Mit den Anfangsbedingungen y(0) = 0 und v(0) = v_0 ergibt sich c_1 = 0 und $c_2 = \frac{v_0}{\omega_0}$.

Beispiel:
Masse m = 10 [kg], Federkonstante D = 250 [N/m]
Anfangsbedingungen: y(0) = 0.6 m, v(0) = 0 [m/s]

Die Eigenfrequenz berechnet sich in diesem Fall zu $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{250}{10}} = 5$ [1/s]
Die allgemeine Lösung ergibt sich damit zu
$y(t) = c_1 \cdot \sin(5t) + c_2 \cdot \cos(5t)$



Die auftretenden Konstanten sind durch die Anfangsbedingungen bestimmt
y(0) = c_2 = 0.6 [m]
$\dot{y}(0) = c_1 = 0$
Das mechanische System schwingt folglich harmonisch nach der Gleichung
$y(t) = 0.6 \cdot \cos(5t)$
Die Schwingungsdauer beträgt
$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2}{5} \cdot \pi \approx 1.26$ s

Freie gedämpfte Schwingung

$\ddot{y} + +2\delta \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0$ δ: Dämpfungsfaktor, Abklingkonstante

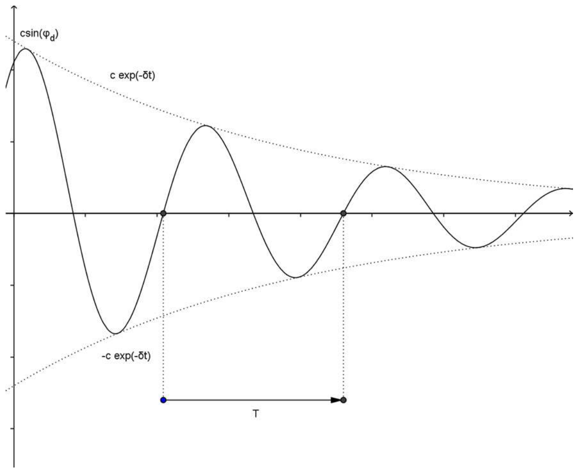
ω_0: Eigenfrequenz

Die zugehörige charakteristische Gleichung
$\lambda^2 + 2\delta \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0$
hat die Diskriminante
$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2 = 4 \cdot \left(\delta^2 - \omega_0^2\right)$.
Je nach dem Wert der Diskriminante treten die folgenden drei Fälle auf:
a) D < 0 bzw. $\delta < \omega_0$: Gedämpfte Schwingung (Schwingungsfall)
b) D = 0 bzw. $\delta = \omega_0$: Aperiodischer Grenzfall
c) D > 0 bzw. $\delta > \omega_0$: Aperiodische Schwingung (Kriechfall)

Bei starker Dämpfung D ≥ 0 liegt keine echte Schwingung vor, sondern das System bewegt sich aperiodisch auf die Grenzlage zu.

a) schwache Dämpfung (Schwingungsfall): D < 0

Mit der Abkürzung $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2 > 0$ hat die charakteristische Gleichung die beiden konjugiert komplexen Lösungen
$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i \cdot \omega_d$



Die allgemeine Lösung hat damit nach dem einleitenden Abschnitt die Form:
$y(t) = e^{-\delta t} \cdot \left(c_1 \cdot \sin(\omega_d t) + c_2 \cdot \cos(\omega_d t)\right)$

Das System schwingt im Vergleich zu der ungedämpften Schwingung mit einer verkleinerten Frequenz ω_d. Wegen des Energieverlusts nimmt die Schwingungsamplitude mit der Zeit exponentiell ab.

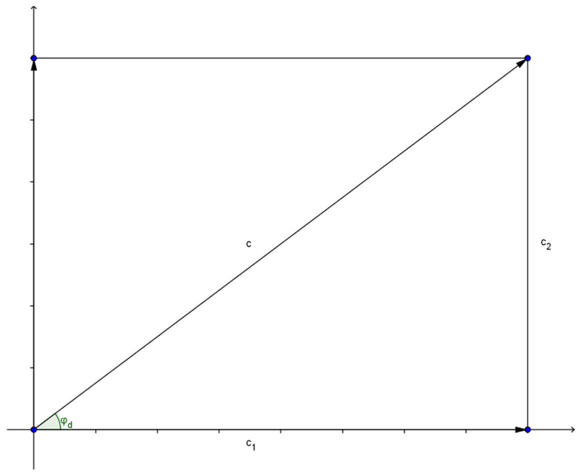
Spezielle Lösung:
Die Werte der Konstanten ergeben sich aus den Anfangsbedingungen. Beginnt etwa die Bewegung zur Zeit t = 0 aus der Ruhe heraus mit der Auslenkung a > 0 dann folgt wegen
$y(t) = e^{-\delta t} \cdot \left(c_1 \cdot \sin(\omega_d t) + c_2 \cdot \cos(\omega_d t)\right)$ und
$\dot{y}(t) = -\delta \cdot e^{-\delta t} \cdot \left(c_1 \cdot \sin(\omega_d t) + c_2 \cdot \cos(\omega_d t)\right) + e^{-\delta t} \cdot \left(c_1 \cdot \omega_d \cos(\omega_d t) - c_2 \cdot \omega_d \sin(\omega_d t)\right)$

$y(0) = c_2 = a$ und $\dot{y}(0) = -\delta \cdot c_2 + c_1 \cdot \omega_d = -\delta \cdot a + c_1 \cdot \omega_d = 0$ oder also $c_1 = \dfrac{\delta \cdot a}{\omega_d}$

Dabei ist auch die folgende Darstellung möglich

$y(t) = c \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_d) \qquad c > 0,\ 0 \le \varphi_d < 2\pi$

wobei die Konstanten c und φ_d mit dem Zeigerdiagramm bestimmt werden können:



$$\tan\varphi_d = \frac{c_2}{c_1} = a : \frac{\delta \cdot a}{\omega_d} = \frac{\omega_d}{\delta} \qquad (3)$$

wegen $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ bzw. $\delta^2 = \omega_0^2 - \omega_d^2$

gilt nach Pythagoras

$$c^2 = c_1^2 + c_2^2 = a^2 + a^2 \cdot \frac{\delta^2}{\omega_d^2} = a^2 \cdot \left(1 + \frac{\delta^2}{\omega_d^2}\right)$$

$$= a^2 \cdot \left(\frac{\omega_d^2 + \delta^2}{\omega_d^2}\right) = a^2 \cdot \left(\frac{\omega_0^2 - \delta^2 + \delta^2}{\omega_d^2}\right) = a^2 \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_d^2}$$

oder $c = a \cdot \dfrac{\omega_0}{\omega_d}$ (4)

Numerisches Beispiel:
m = 10 kg, b = 80 [kg/s], D = 250 [N/m]
Anfangsbedingungen
y(0) = a = 0.6 [m] v(0) = 0 [m/s].

Für den Dämpfungsfaktor ergibt sich damit:

$$\delta = \frac{b}{2m} = \frac{80}{2 \cdot 10} = 4 \quad [s^{-1}]$$

und für die Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{250}{10}} = 5 \quad [s^{-1}]$$

Wegen $\delta < \omega_0$ liegt der Fall einer schwachen Dämpfung vor mit der neuen Eigenfrequenz

$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2 = 25 - 16 = 9$ oder $\omega_d = 3$ [s^{-1}]

Die Schwingungsgleichung in diesem Spezialfall

$\ddot{y} + 8\dot{y} + 25y = 0$

mit der Lösung

$y(t) = c \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_d) = c \cdot e^{-4t} \cdot \sin(3t + \varphi_d)$

Die Werte der Konstanten ergeben sich nach 3) und 4) zu

$$c = a \cdot \frac{\omega_0}{\omega_d} = 0.6 \cdot \frac{5}{3} = 1\,\text{m}$$

$$\tan\varphi_d = \frac{\omega_d}{\delta} = \frac{3}{4} \text{ oder } \varphi_d = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.6435$$

c) Starke Dämpfung (aperiodische Schwingung, Kriechfall): D > 0

Bei starker Dämpfung ($\delta > \omega_0$ und D > 0) hat die charakteristische Gleichung
$\lambda^2 + 2\delta \cdot \lambda + \omega_0^2 \cdot = 0$
die beiden negativen Lösungen
$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4 \cdot \left(\delta^2 - \omega_0^2\right)}}{2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\ .$$
Die allgemeine Lösung ist damit eine Linearkombination zweier monoton fallender Exponentialfunktionen
$y(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$
Je nach den Anfangsbedingungen ergibt sich bei der Anfangslage a > 0 ein unterschiedlicher zeitlicher Verlauf:

$v_0 = 0$:	aus der Ruhe heraus
$v_0 > 0$	Bewegung nach aussen von der Gleichgewichtslage weg
$v_0 < 0$	Bewegung nach innen in Richtung Gleichgewichtslage.

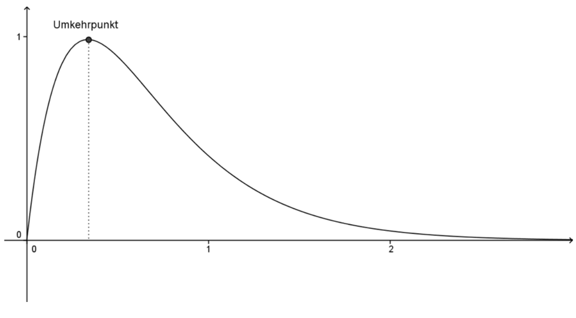
Infolge der zu starken Dämpfung liegt keine echte Schwingung vor. Das System nähert sich asymptotisch der Gleichgewichtslage.

Beispiel: Bewegung aus der Gleichgewichtslage mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 > 0$

$\ddot{y} + 6\dot{y} + \frac{35}{4} y = 0$
Anfangswerte: y(0) = 0, v(0) = 8.

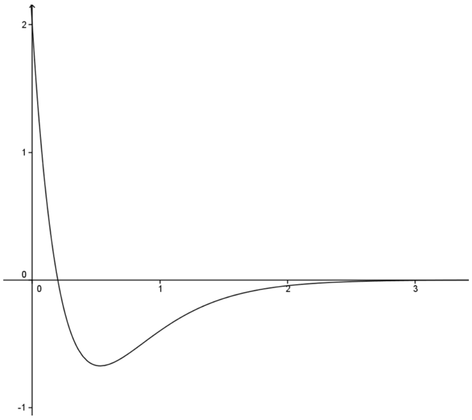
In diesem Fall hat die charakteristische Gleichung
$\lambda^2 + 6\lambda + \frac{35}{4} = 0$ mit der Diskriminante D = 1 die Lösungen
$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm 1}{2}$ bzw. $\lambda_1 = -\frac{5}{2}$ und $\lambda_2 = -\frac{7}{2}$
Daher lautet die allgemeine Lösung:
$y(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{5}{2}t} + c_2 \cdot e^{-\frac{7}{2}t}$
Die Konstanten sind durch die Anfangsbedingung bestimmt:

Mit $\dot{y}(t) = -\frac{5}{2} c_1 \cdot e^{-\frac{5}{2}t} - \frac{7}{2} c_2 \cdot e^{-\frac{7}{2}t}$ ergibt sich das Gleichungssystem
$y(0) = c_1 + c_2 = 0$ oder $c_2 = - c_1$
$v(0) = \dot{y}(0) = -\frac{5}{2} c_1 - \frac{7}{2} c_2 = -\frac{5}{2} c_1 + \frac{7}{2} c_1 = c_1 = 8$
Die gesuchte partikuläre Lösung heisst damit
$y(t) = 8 \cdot \left(e^{-\frac{5}{2}t} - e^{-\frac{7}{2}t} \right)$



b) Aperiodischer Grenzfall: D = 0

Der aperiodische Grenzfall trennt die eigentlichen Schwingungen von den aperiodischen Bewegungsabläufen.
In diesem Fall besitzt die charakteristische Gleichung die Doppellösung $\lambda_{1,2} = -\delta$.
Die allgemeine Lösung hat also nach dem einleitenden Abschnitt die Form:
$y(t) = (c_1 \cdot t + c_2) \cdot e^{-\delta t}$
Das System verhält sich ähnlich wie im Kriechfall



Beispiel: Bewegung aus der Anfangslage v(0) = a mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 < 0$.

Wegen $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ und $2\delta = \frac{b}{m}$ tritt der Grenzfall genau dann ein, wenn
$\delta = \frac{b}{2m} = \sqrt{\frac{D}{m}} = \omega_0$

Zahlenbeispiel:
Federkonstante D = 200 [N/m],
Dämpfungskonstante b = 60 [kg/s]
Der Grenzfall tritt bei der kritischen Masse $m = \frac{b^2}{4D} = 4.5$ kg ein.

Erzwungene Schwingung

Auf ein gedämpftes mechanisches System wirke nun von aussen her eine periodische Kraft
$F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega t)$ ω: Kreisfrequenz
ein, dann lautet die Differentialgleichung (2)
$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + D \cdot y = F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega t)$ Gleichung einer erzwungenen Schwingung
$\dot{y} + 2\delta \dot{y} + \omega_0^2 y = K_0 \cdot \sin(\omega t)$
oder mit den üblichen Abkürzungen
$\delta = \frac{b}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ und $K_0 = \frac{F_0}{m}$
$\dot{y} + 2\delta \dot{y} + \omega_0^2 y = K_0 \cdot \sin(\omega t)$

Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung erhält man durch Superposition der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung

Das folgende Beispiel illustriert das Vorgehen:

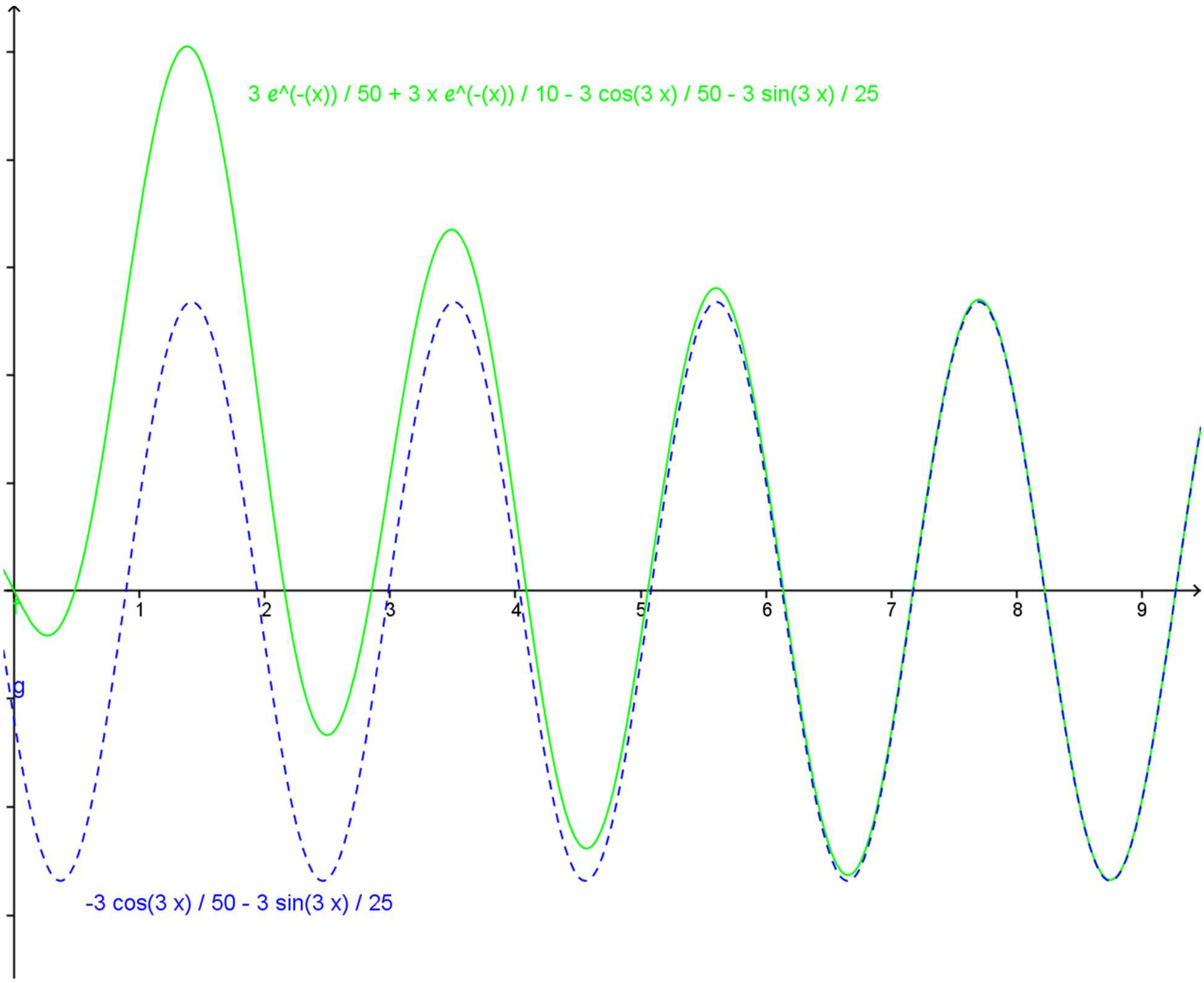
Beispiel:
$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \sin(3t)$ (5) inhomogene Gleichung
y(0) = 0, v(0) = 0 Anfangsbedingungen.

Die zugehörige homogene Differentialgleichung
$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0$ (6)
hat das charakteristische Polynom
$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$ mit der doppelten Nullstelle λ = -1.
Die Gleichung (6) hat also allgemeine Lösung
$y(t) = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot t \cdot e^{-t}$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (5) kann mit dem folgenden Ansatz gefunden werden:
$y_0(t) = a \cdot \cos(3t) + b \cdot \sin(3t)$

Einsetzen dieses Ansatzes in die Gleichung (5) ergibt die Gleichung
$(-9a + 6b + a) \cdot \cos(3t) + (-9b - 6a + b - 1) \cdot \sin(3t) \equiv 0$
und mit Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem
$\begin{vmatrix} -8a + 6b = 0 \\ -6a - 8b = 1 \end{vmatrix}$ mit den Lösungen a = $-{}^{3}/_{50}$ und b = ${}^{2}/_{25}$.

Als spezielle Lösung ergibt sich damit:
$y_0(t) = -\frac{3}{50} \cdot \cos(3t) - \frac{2}{25} \cdot \sin(3t)$
Also heisst die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (5)
$y(t) = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot t \cdot e^{-t} - \frac{3}{50} \cdot \cos(3t) - \frac{2}{25} \cdot \sin(3t)$



Schliesslich sind noch die Konstanten so zu bestimmen, dass die vorgegebenen Anfangsbedingungen erfüllt sind:
Das folgende Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} y(0) = c_1 - \frac{3}{50} = 0 \\ -c_1 + c_2 - \frac{6}{25} = 0 \end{array} \right|$$

hat die Lösungen:
$c_1 = {}^3/_{50}$ und $c_2 = {}^3/_{10}$

Somit heisst die gesuchte Lösungsfunktion

$$y(t) = \frac{3}{50} \cdot e^{-t} + \frac{3}{10} \cdot t \cdot e^{-t} - \frac{3}{50} \cdot \cos(3t) - \frac{2}{25} \cdot \sin(3t)$$