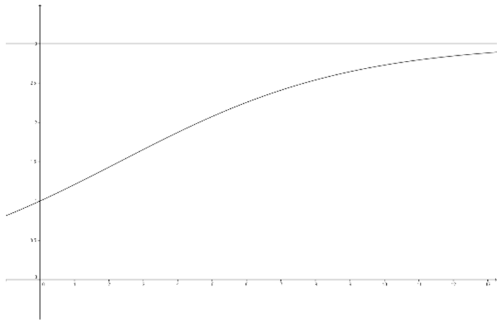
6.4 Logistisches Wachstum

Ein Nachteil des Modells vom beschränkten Wachstum besteht darin, dass für kleine t die Funktion ungefähr linear statt exponentiell wächst. Diese Schwäche wird durch das logistische Modell behoben. Der Name stammt vom Belgier Verhulst (1804-1849). Bei diesem Modell verläuft das Wachstum anfänglich ungefähr exponentiell, gegen Ende des Beobachtungs-Zeitraumes nähert sich das Wachstum dem beschränkten Wachstum mit der Sättigungsgrenze S. Das bedeutet, dass die momentane Wachstumsrate proportional zu y und zu (S – y) ist.



$\dot{y} = k \cdot y \cdot (S - y)$ (1) Differentialgleichung des logistischen Wachstums $k > 0$

Beispiel in der Abbildung k = 0.1 und S = 3.

Die Gleichung hat die Gleichgewichtslösungen y = 0 und y = S. Für 0 < y < S ist $\dot{y}$ positiv und y damit streng monoton wachsend. Das Wachstum ist bei y = ½ S maximal.

Für y ≠ 0 und y ≠ S kann die Gleichung umgeformt werden zu:

$$\frac{\dot{y}}{y \cdot (S - y)} = k \quad (2)$$

Nach der Theorie der Partialbruchzerlegung kann der Bruch auf der linken Seite in Teilbrüche zerlegt werden:

$$\frac{1}{y \cdot (S - y)} = \frac{a}{y} + \frac{b}{S - y} = \frac{a \cdot (S - y) + by}{y \cdot (S - y)} = \frac{aS + y \cdot (b - a)}{y \cdot (S - y)}$$

Die Konstanten sind damit bestimmt zu:

$$a = b = \frac{1}{S}$$

Gleichung (2) kann damit neu in der folgenden Form dargestellt werden:

$$\frac{\dot{y}}{Sy} + \frac{\dot{y}}{S \cdot (S - y)} = k \text{ oder } \frac{\dot{y}}{y} - \frac{-\dot{y}}{(S - y)} = Sk$$

Integration ergibt:

$$\ln|y| - \ln|S - y| = \ln y - \ln(S - y) = \ln \frac{y}{S - y} = Skt + c_1 \qquad \text{wegen } 0 < y < S$$

$$\frac{y}{S - y} = e^{Skt + c_1} \qquad \text{oder für den Kehrwert}$$

$$\frac{S - y}{y} = e^{-Skt - c_1} \qquad \text{oder } S - y = y \cdot e^{-Skt - c_1} \text{ bzw. } S = y \cdot \left(1 + e^{-Skt - c_1}\right)$$

mit der Lösung

$$y = \frac{S}{1 + c_2 \cdot e^{-Skt}}$$

Zur Zeit t = 0 erhält man den Anfangswert $y_0 = \frac{S}{1+c_2}$.

Daraus ergibt sich für die Konstante der Wert $c_2 = \frac{S-y_0}{y_0}$ und die Lösung

$$y = \frac{S}{1+\frac{S-y_0}{y_0}\cdot e^{-Skt}} = \frac{y_0 S}{y_0 + (S-y_0)\cdot e^{-Skt}} \qquad (3) \text{ logistisches Wachstum.}$$

Im einleitenden Beispiel ergibt sich für den Anfangswert $y_0 = 1$ die spezielle Lösung

$$y = \frac{3}{1+2\cdot e^{-0.3t}}\,.$$

Bemerkung 1:
Auf Überbevölkerung (Anfangswert $y_0 > S$) reagiert das Modell mit der Abnahme der Individuenzahl gegen die Sättigungsgrenze S.

Bemerkung 2:
Die Partialbruchzerlegung kann mit dem folgenden Kunstgriff vermieden werden:
Man betrachtet die wegen $y = f(t) \neq 0$ definierte Hilfsfunktion

$$y = g(t) = \frac{1}{f(t)}$$

Wegen

$$\dot{g}(t) = \frac{-\dot{f}(t)}{f^2(t)} = -\frac{k\cdot f(t)\cdot(S-f(t))}{f^2(t)} = \frac{k\cdot f(t)\cdot(f(t)-S)}{f^2(t)} = k - \frac{kS}{f(t)} = k\cdot(1-S\cdot g(t))$$

ist g(t) Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$\dot{y} = k\cdot(1-Sy)$$

mit der Lösung

$$g(t) = \frac{1}{S} + c_1\cdot e^{-kSt} = \frac{1}{S}\cdot\left(1+c_2\cdot e^{-kSt}\right)$$

Die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung (1) heisst damit

$$y = \frac{S}{1+c_2\cdot e^{-kSt}}$$

Die Differentialgleichung (1) kann auch die Ausbreitung einer unheilbaren aber nicht tödlichen Krankheit beschreiben.
Es wird angenommen, dass diese Krankheit in einer isolierten Population mit S Individuen umgeht. N(t) bezeichne die Anzahl der zur Zeit t infizierten Individuen.
Modellvorstellung:
Die Wachstumsrate $\dot{N}(t)$ ist proportional zur Anzahl der Kranken N(t) und zur Anzahl der Gesunden (S – N(t)) (d.h. proportional zur Anzahl der Kontakte zwischen Kranken und Gesunden). Bezeichnet man N(t) mit y so erhält man die bekannte Differentialgleichung

$$\dot{y} = k\cdot y\cdot(S-y).$$

Beispiel:
Ist in einer Population von 5000 Menschen zu Beginn ein Bewohner infiziert und zählt man nach 4 Wochen 300 Kranke, dann gilt:

$$N(t) = \frac{1 \cdot 5000}{1 + (5000 - 1) \cdot e^{-5000 \cdot kt}} \text{ t in Wochen}$$

Wegen

$$N(4) = \frac{5000}{1 + 4999 \cdot e^{-5000 \cdot 4k}} = 300 \qquad k \approx 2.883 \cdot 10^{-4}$$

Im Zeitpunkt, wo die Hälfte der Stammesbewohner krank ist gilt:

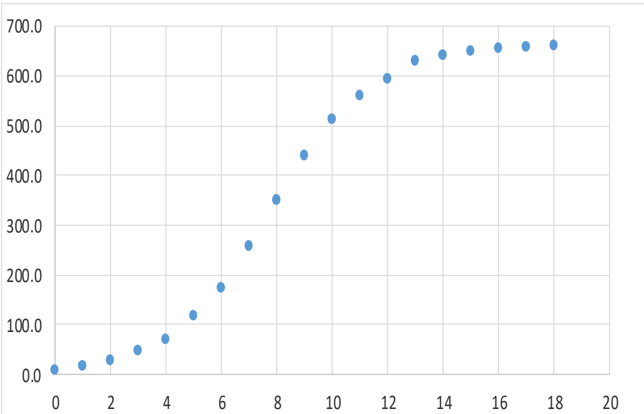
$$N(t) \approx \frac{5000}{1 + 4999\, e^{-1.441364464\, t}} = 2500$$

Auflösung die Gleichung ergibt t ≈ 5.9. Ab diesem Zeitpunkt sinkt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Krankheit (sogenannter Vitalitätsknick).

Im folgenden Beispiel werden die Parameter aus den Daten geschätzt.

Wachstum einer Hefekultur (Carlson 1913)

Zeit t [h]	Hefemenge N(t) [mg]
t	y = N(t)
0	9.6
1	18.3
2	29.0
3	47.2
4	71.1
5	119.1
6	174.6
7	257.3
8	350.7
9	441.0
10	513.3
11	559.7
12	594.8
13	629.4
14	640.8
15	651.1
16	655.9
17	659.6
18	661.8



Die Parameter in Gleichung (3) können geschätzt werden, indem man den Zähler und den Nenner $\frac{1}{y_0}$ erweitert:

$$y = \frac{y_0 \cdot S}{y_0 + (S - y_0) \cdot e^{-S \cdot k \cdot t}} = \frac{S}{1 + \left(\frac{S}{y_0} - 1\right) \cdot e^{-S \cdot k \cdot t}}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1 + \left(\frac{S}{y_0} - 1\right) \cdot e^{-Skt}}{S} = \frac{1}{S} + \left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{S}\right) \cdot e^{-Skt}$$

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{S} = \left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{S}\right) \cdot e^{-Skt}$$

$$\ln\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{S}\right) = -Skt + \ln\left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{S}\right)$$

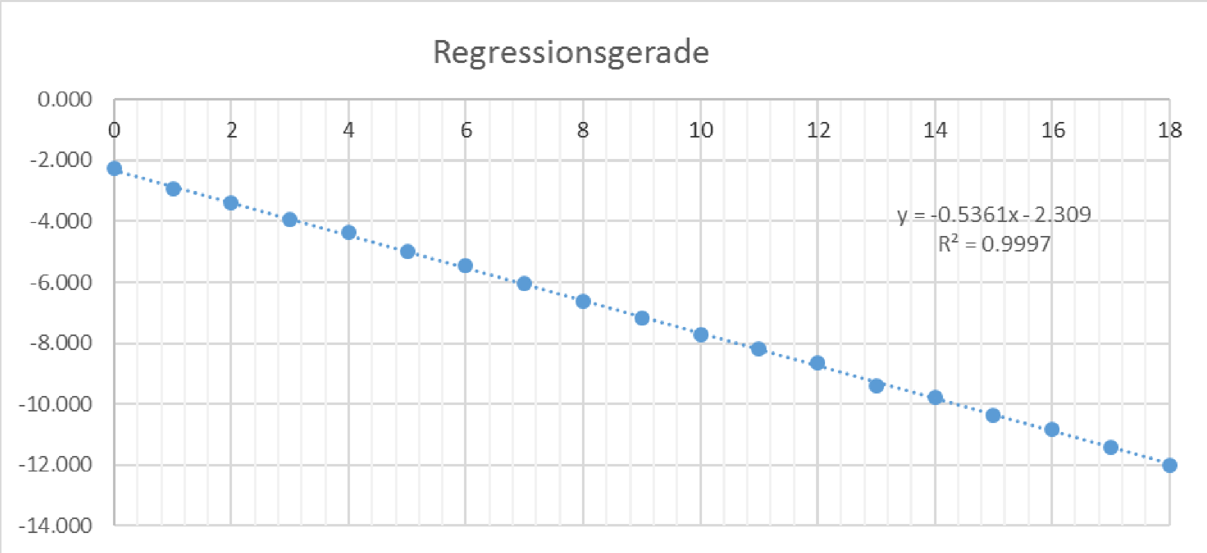
Das Ergebnis bedeutet, dass für die logistische Verteilung die Punkte $\left(y, \ln\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{S}\right)\right)$ auf einer Geraden mit der Steigung

m = -S·k (4)

und dem y-Achsenabschnitt $q = \ln\left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{S}\right)$ (5) liegen.

Im Folgenden sind für die vorgegebenen Daten die Punkte $\left(y, \ln\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{S}\right)\right)$ dargestellt. Dazu muss allerdings für die Kapazitätsgrenze S eine plausible Annahme getroffen werden. Wählt man nach verschiedenen Versuchen S = 664.5 so ergibt sich die folgende Tabelle mit besonders guter Übereinstimmung mit den Daten:

Hefemenge N(t) [mg] y = N(t)	1/y	ln(1/y - 1/S)	Regressionswerte	Residuen
9.6	0.1042	-2.2763	-2.3090	0.0327
18.3	0.0546	-2.9348	-2.8451	-0.0897
29.0	0.0345	-3.4119	-3.3812	-0.0307
47.2	0.0212	-3.9281	-3.9173	-0.0108
71.1	0.0141	-4.3773	-4.4534	0.0761
119.1	0.0084	-4.9775	-4.9895	0.0120
174.6	0.0057	-5.4673	-5.5256	0.0583
257.3	0.0039	-6.0400	-6.0617	0.0217
350.7	0.0029	-6.6102	-6.5978	-0.0124
441.0	0.0023	-7.1787	-7.1339	-0.0448
513.3	0.0019	-7.7213	-7.6700	-0.0513
559.7	0.0018	-8.1744	-8.2061	0.0317
594.8	0.0017	-8.6431	-8.7422	0.0991
629.4	0.0016	-9.3856	-9.2783	-0.1073
640.8	0.0016	-9.7963	-9.8144	0.0181
651.1	0.0015	-10.3824	-10.3505	-0.0319
655.9	0.0015	-10.8333	-10.8866	0.0533
659.6	0.0015	-11.4014	-11.4227	0.0213
661.8	0.0015	-12.0007	-11.9588	-0.0419



Excel liefert für die Steigung m und den y-Achsenabschnitt q die Werte:
m ≈ -0.5361 und q ≈ -2.309.
Mit (4) und (5) können damit die Parameter geschätzt werden:

m = -S·k (4) oder $k = -\frac{m}{S} \approx 0.000806772$

Aus Gleichung (5) für den y-Achsenabschnitt $q = \ln\left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{S}\right)$ folgt:

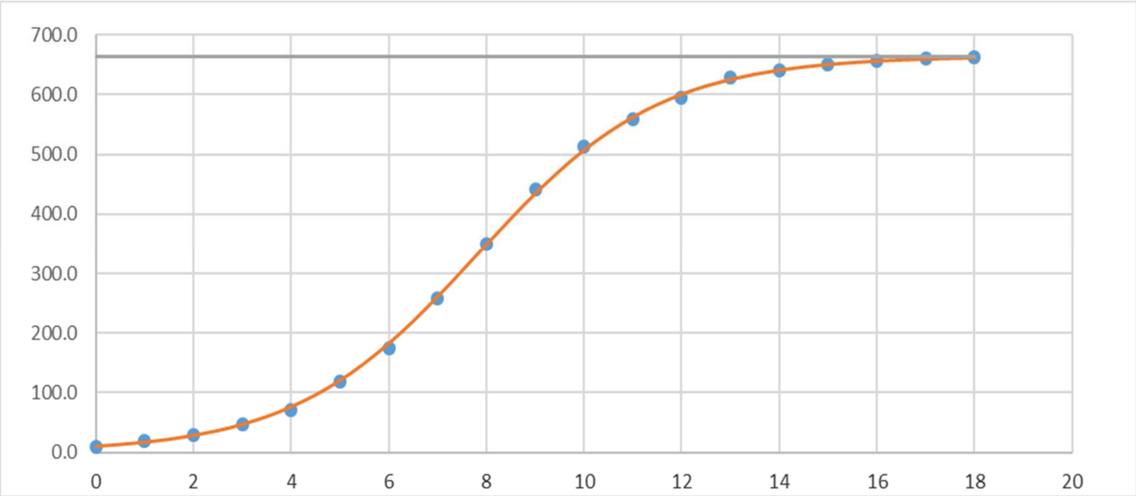
$$e^q = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{S}$$ oder

$$\frac{1}{y_0} = e^q + \frac{1}{S} = \frac{S \cdot e^q + 1}{S}$$

und damit

$$y_0 = \frac{S}{S \cdot e^q + 1} \approx 9.914197247$$

Vergleich der Daten mit den Werten des logistischen Wachstums



$N(t) = \dfrac{y_0 S}{y_0 + (S - y_0) \cdot e^{-Skt}}$ mit den Parametern S = 664.5

$k = -\dfrac{m}{S} \approx 0.000806772$ und $y_0 = \dfrac{S}{S \cdot e^{q} + 1} \approx 9.914197247$

Zeit t [h]	Hefemenge N(t) [mg]		
t	y = N(t)	Werte geschätzt	Abweichungen
0	9.6	9.9	0.3
1	18.3	16.8	-1.5
2	29.0	28.2	-0.8
3	47.2	46.7	-0.5
4	71.1	76.1	5.0
5	119.1	120.3	1.2
6	174.6	182.2	7.6
7	257.3	260.7	3.4
8	350.7	348.6	-2.1
9	441.0	434.3	-6.7
10	513.3	507.2	-6.1
11	559.7	562.5	2.8
12	594.8	600.7	5.9
13	629.4	625.7	-3.7
14	640.8	641.2	0.4
15	651.1	650.7	-0.4
16	655.9	656.3	0.4
17	659.6	659.7	0.1
18	661.8	661.7	-0.1