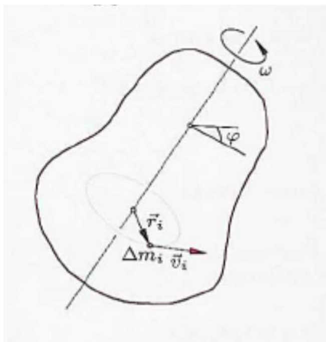
Anwendungen der Integralrechnung

1 Trägheitsmomente

1. 1 Einleitung, Definition

Körper fallen im Vakuum gleich schnell und sie gleiten auf einer reibungsfreien schiefen Ebene gleich schnell. Sie rollen aber auf dieser nicht gleich schnell hinunter, denn ein Teil der potentiellen Energie wird in Rotationsenergie umgewandelt. Die Rotationsenergie eines Körpers bezüglich einer Drehachse ist die Summe der kinetischen Energie aller Massenelemente. Jedes Massenelement Δm_i im Abstand r_i von der Drehachse liefert den Energiebeitrag

$\Delta E_i = \frac{1}{2} \cdot \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \cdot \Delta m_i r_i^2 \omega^2$



Für die totale Rotationsenergie gilt damit

$$E_{rot} = \sum_i \tfrac{1}{2} \cdot \Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot J\omega^2$$

Die von der Massenverteilung und der Drehachse abhängige Grösse J in der Klammer heisst Trägheitsmoment.
Für einen beliebigen Körper der Masse m mit dem Volumen V kann das Trägheitsmoment durch einen in 1.8 noch zu präzisierenden Grenzübergang als Integral definiert werden zu

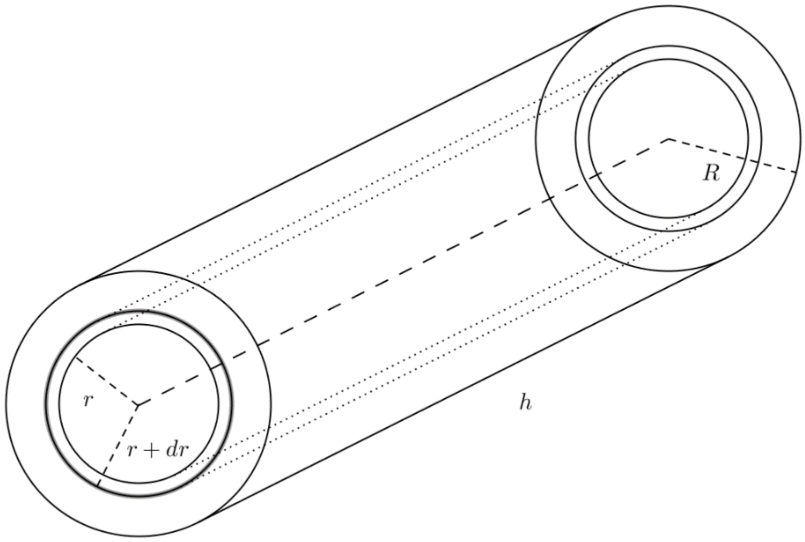
$$\boxed{J = \int_{(m)} r^2 dm = \rho \int_{(V)} r^2 dV} \qquad 1.1.1$$

Damit kann die Rotationsenergie folgendermassen ausgedrückt werden
$E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot J\omega^2$
in Analogie zur Translationsenergie
$E_{trans} = \frac{1}{2} \cdot mv^2$
Trägheitsmomente spielen damit bei Drehbewegungen eine ähnliche Rolle wie die Masse bei Translationsbewegungen.

Bemerkung:
Vergleiche dazu die Definition der Varianz in der Statistik (mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert („Schwerpunkt“).

1.2 Trägheitsmoment eines homogenen Kreiszylinders bezüglich seiner Achse

R: Radius des Kreiszylinders
h: Höhe des Kreiszylinders
ρ: konstante Dichte



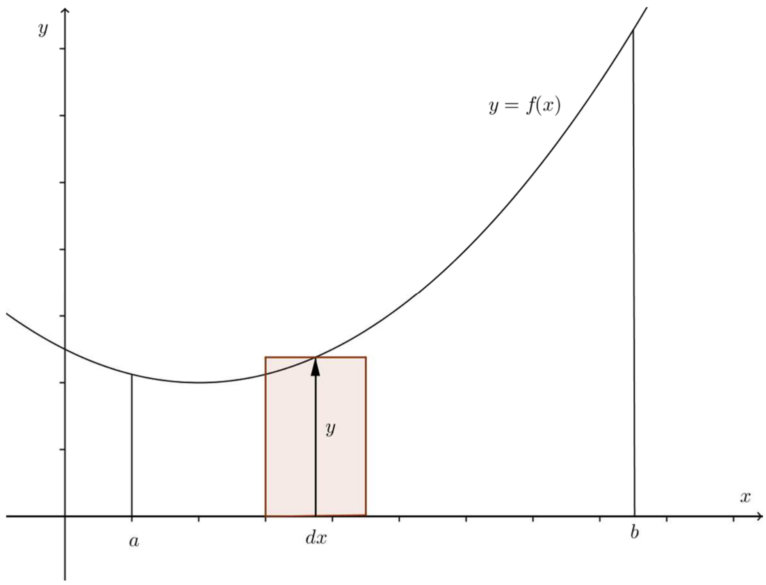
Ein schmaler Hohlzylinder mit Innenradius r und Breite dr hat die Grundfläche
$dA = 2\pi r \cdot dr$
und damit das Volumen dV bzw. die Masse dm
$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot dA \cdot h = \rho \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot h = 2\pi\rho h \cdot r dr$
Der Beitrag dieses Hohlzylinders zum Trägheitsmoment J beträgt
$dJ = r^2 \cdot 2\pi\rho h \cdot r dr = 2\pi\rho h \cdot r^3 dr$
Das totale Trägheitsmoment erhält man durch Integration über alle zwischen r = 0 und r = R gelegenen Hohlzylinder

$$J = 2\pi\rho h \cdot \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho h \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot r^4\right]_0^R = \frac{1}{2} \cdot (\rho\pi R^2 h) \cdot R^2$$

Da in der Klammer gerade die Masse $m = \rho\pi R^2 h$ des Kreiszylinders steht, ergibt sich das folgende einfache Resultat

$$\boxed{J_{Zylinder} = \frac{1}{2} m R^2} \qquad 1.2.1$$

1.3 Trägheitsmoment eines homogenen Rotationskörpers



Das vom Graphen der Funktion f und den Geraden x = a bzw. x = b begrenzte Gebiet erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen Rotationskörper.
Dieser Körper wird in dünne Scheiben der Dicke dx zerlegt, die wir durch Kreiszylinder annähern. Das schattierte Rechteck erzeugt bei Rotation um die x-Achse eine zylindrische Scheibe mit der Höhe dx, dem Radius R = y und der Masse dm.

Mit 1.2.1 ergibt sich dann der Beitrag dJ_x zum Trägheitsmoment zu
$dJ_x = \frac{1}{2} \cdot y^2 dm$
Einsetzen der Teilmasse
$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot \pi y^2 \mathrm{dx}$
ergibt
$dJ_x = \frac{1}{2} \cdot y^2 dm = \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot \rho \cdot \pi y^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \pi \rho y^4 dx$

Das totale Trägheitsmoment erhält man durch Integration (Summation) über die Beiträge sämtlicher zwischen x = a und x = b gelegenen Scheibchen zu

$$J_x = \int_{x=a}^{b} dJ_x = \int_{x=a}^{b} \frac{1}{2} \cdot y^2 dm = \int_a^b \frac{1}{2} \cdot \pi \rho y^4 dx = \frac{1}{2} \cdot \pi \rho \cdot \int_a^b y^4 \, dx$$

Für das Trägheitsmoment eines homogenen Rotationskörpers gilt also bei Rotation um die x-Achse

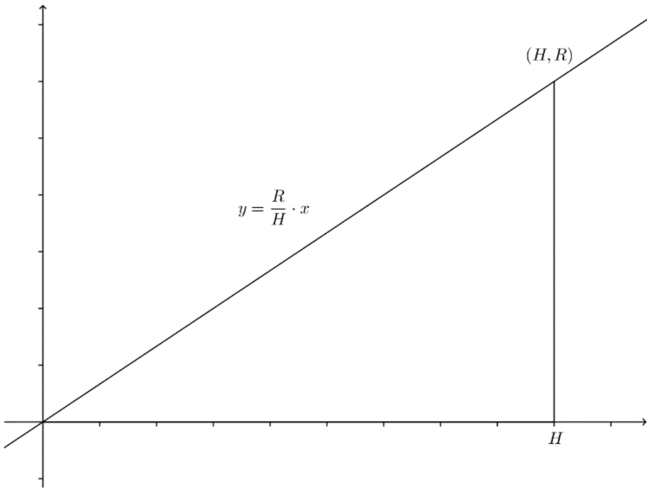
$$\boxed{J_x = \frac{1}{2} \cdot \pi \rho \cdot \int_a^b y^4 \, dx = \frac{1}{2} \cdot \pi \rho \cdot \int_a^b f^4(x) \, dx} \qquad 1.3.1$$

ρ: konstante Dichte des (homogen gefüllten) Rotationskörpers

Durch Drehung einer Kurve x = g(y) im Intervall [c, d] um die y-Achse entsteht ebenfalls ein Rotationskörper.
Für sein Trägheitsmoment J_y bezüglich der Rotationsachse (y-Achse) gilt dann entsprechend

$$\boxed{J_y = \frac{1}{2} \cdot \pi \rho \int_c^d x^4 \, dy = \frac{1}{2} \cdot \pi \rho \cdot \int_c^d g^4(y) \, dy} \qquad 1.3.2$$

Beispiel:
Leite das Trägheitsmoment eines Kegels bezüglich der Kegelachse her.



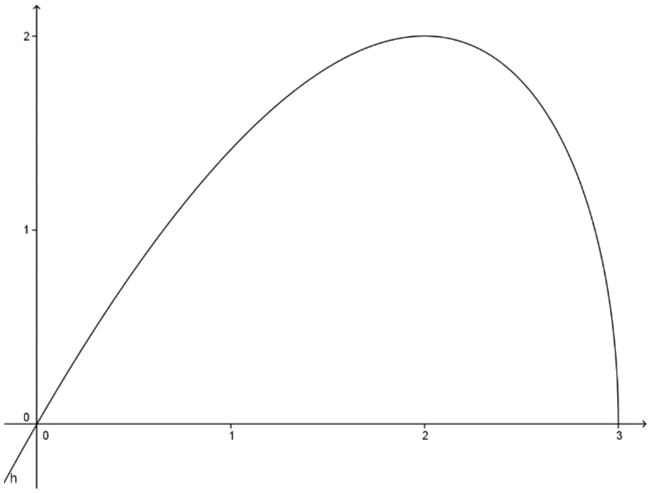
Lösung:
Der Kegel entsteht durch Rotation der Geraden mit der Gleichung $y = \frac{R}{H} \cdot x$ um die x-Achse.

$$J = \frac{1}{2}\pi\rho \int_0^H \left(\frac{R}{H} \cdot x\right)^4 dx = \pi\rho \frac{R^4}{H^4} \int_0^H x^4 dx$$

$$J = \frac{1}{2}\pi\rho \frac{R^4}{H^4} \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^H = \frac{1}{10}\pi\rho R^4 H = \rho \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 H \cdot \frac{3}{10} R^2$$

$$J = \frac{3}{10} m R^2$$

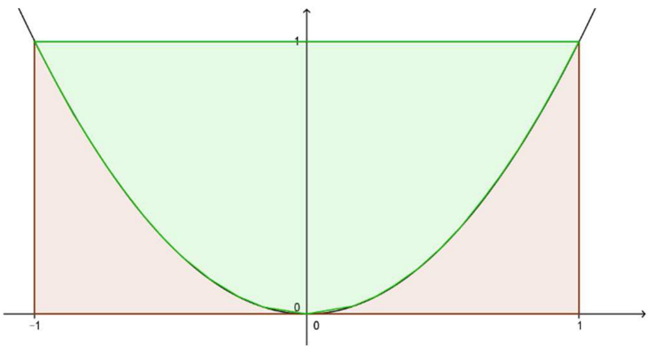
Übungsaufgaben:
1.
Berechne das Trägheitsmoment eines homogenen stromlinienförmigen Körpers der konstanten Dichte ρ, der durch Rotation der Kurve $y = x \cdot \sqrt{3 - x}$ im Intervall [0, 3] bei Rotation um die x-Achse entsteht.



Lösung:

$$J_x = \frac{1}{2}\pi\rho \cdot \int_0^3 \left(x\sqrt{3-x}\right)^4 dx = \frac{1}{2}\pi\rho \int_0^3 x^4 (3-x)^2 dx = \frac{1}{2}\pi\rho \left[\frac{1}{7} \cdot x^7 - x^6 + \frac{9}{5} \cdot x^5\right]_0^3 = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{729}{35}$$

2.
Gesucht ist das Trägheitsmoment des homogen mit der Masse ρ = 1 belegten Rotationskörper der entsteht, wenn man
a)
die durch die Ungleichungen $0 \leq y \leq x^2 \leq 1$ bestimmte hellrote Fläche um die x-Achse rotiert
b)
die durch die Ungleichungen $0 \leq x^2 \leq y \leq 1$ bestimmte hellgrüne Fläche um die y-Achse rotiert.



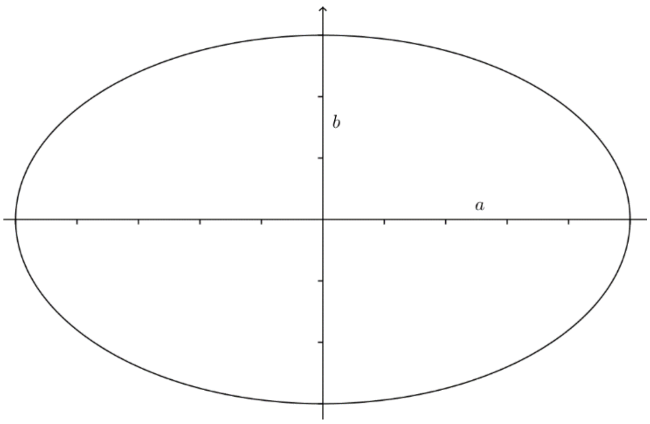
Lösung:
a)

$$J_x = \frac{\pi}{2} \cdot \int_{-1}^{1} y^4 \, dx = \pi \cdot \int_0^1 x^8 \, dx = \frac{1}{9} \cdot \pi$$

b)
wegen $\frac{dy}{dx} = 2x$ gilt $dy = 2dx$

$$J_y = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 x^4 \, dy = \pi \cdot \int_0^1 x^5 \, dx = \frac{1}{6} \cdot \pi$$

3.
Die Ellipse mit der Gleichung
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
erzeugt bei Rotation um die y-Achse einen Rotationskörper. Gesucht ist das Trägheitsmoment dieses homogen mit der Masse ρ = 1 belegten Ellipsoids.



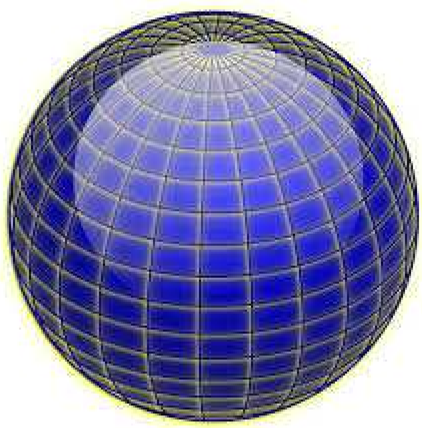
Lösung:

$$J_y = \frac{1}{2} \cdot \pi\rho \int_{-b}^{b} x^4 \, dy = \pi\rho \int_0^b x^4 \, dy = \pi\rho \cdot \frac{a^4}{b^4} \int_0^b (b^2 - y^2)^2 \, dy$$
$$= \pi\rho \cdot \frac{a^4}{b^4} \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot y^5 - \frac{2}{3} \cdot b^2 y^3 + b^4 y\right]_0^b = \pi\rho \cdot \frac{8}{15} \cdot a^4 b = \frac{2}{5} \cdot \left(\rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi a^2 b\right) \cdot a^2$$

Da in der Klammer gerade die Masse m des Ellipsoids steht gilt:
$$J_y = \frac{2}{5} \cdot m a^2$$

1.4 Trägheitsmoment einer homogenen Vollkugel mit Radius R

Eine Kugel entsteht, wenn man den Halbkreis mit der Gleichung
$$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$
im Intervall [-R,+R] um die x-Achse rotieren lässt.
Wegen der Symmetrie zur y-Achse gilt dann nach 1.3.1
$$J_x = \pi\rho \cdot \int_0^R (R^2 - x^2)^2 \, dx = \pi\rho \cdot \int_0^R (R^4 - 2R^2x^2 + x^4) \, dx$$
$$J_x = \pi\rho \cdot \left[\left(R^4 x - \frac{2}{3} \cdot R^2 x^3 + \frac{1}{5} \cdot x^5\right)\right]_0^R$$
$$J_x = \frac{8}{15} \cdot \pi\rho R^5 = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho\right) \cdot R^2 = \frac{2}{5} \cdot m R^2$$

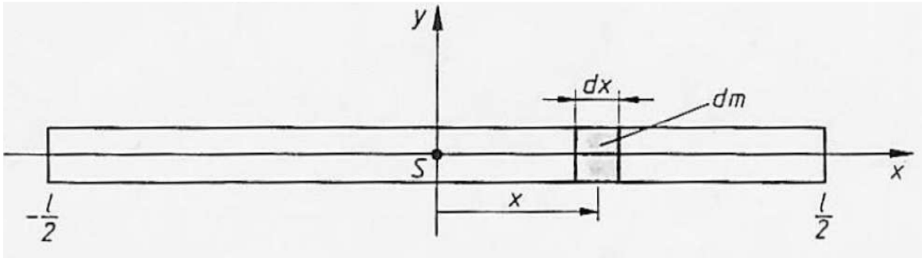


Trägheitsmoment eine Kugel

$$\boxed{J_x == \frac{2}{5} \cdot m R^2} \qquad 1.4.1$$

Herleitungsvariante:
Zerlegung der Kugel in dünne Kreisscheiben mit Radius r = $\sqrt{R^2 - z^2}$ und Höhe dz (siehe dazu Abschnitt 1.7.3).

1.5.Trägheitsmoment eines zylindrischen Stabes



Das Trägheitsmoment eines homogenen zylindrischen Stabes mit der Dichte ρ, dessen Achse senkrecht zur Stabachse durch den Schwerpunkt S geht, kann folgendermassen bestimmt werden. Bei der Herleitung wird vorausgesetzt, dass der Durchmesser des Stabes gegenüber der Stablänge *l* klein ist.
Zerlegt man den Stab in eine grosse Anzahl Zylinderscheiben dann besitzt ein solches infinitesimales Scheibchen die Masse $dm = \rho dV = \rho A dx$ (siehe 1.1.)
Dabei ist A die Querschnittsfläche des Stabes. Der Beitrag dieses Scheibchens zum Trägheitsmoment beträgt dann $dJ = x^2 dm = \rho A x^2 dx$
Das Gesamtträgheitsmoment ergibt sich damit durch Integration zu

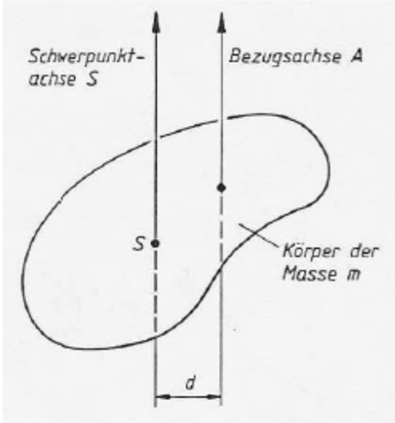
$$J_S = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho A x^2 dx = 2\rho A \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx = 2\rho A \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^l = \frac{1}{12}\rho A l^3$$

Da für die Zylindermasse gilt
$m = \rho V = \rho A l$
erhält man das Trägheitsmoment des Stabes ausgedrückt in seiner Masse m
$J_S = \frac{1}{12}\rho A l^3 = \frac{1}{12} \cdot (\rho A l) \cdot l^2 = \frac{1}{12} m l^2$.

Massenträgheitsmoment eines Stabes (Achse durch den Schwerpunkt)

$$\boxed{J_S = \frac{1}{12} m l^2} \qquad \textbf{1.5.1}$$

1.6 Der Satz von Steiner für Trägheitsmomente



Bisher wurden die Massenträgheitsmomente auf eine durch den Körperschwerpunkt S verlaufende Achse bezogen. Daraus kann nach dem folgenden Satz von Steiner das Trägheitsmoment bezüglich einer zur Schwerpunktsachse parallel verlaufenden Achse bestimmt werden (ohne Beweis).

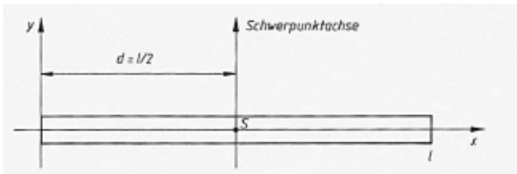
$$\boxed{J_A = J_S + md^2} \tag{1.6.1}$$

Dabei bedeuten

J_S: Trägheitsmoment bezüglich der Schwerpunktsachse S
J_A: Trägheitsmoment bezüglich einer zu S parallelen Achse A
m: Masse des Körpers
d: Abstand der beiden parallelen Achsen

Bemerkung:
Der Summand md^2 kann als Trägheitsmoment der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse m bezüglich der neuen Bezugsachse A interpretiert werden.

Der Satz von Steiner ermöglicht es, das Trägheitsmoment des zylindrischen Stabes auch für eine parallele Bezugsachse durch einen der beiden Endpunkte anzugeben.



Die beiden Achsen haben den Abstand
$d = \frac{1}{2}l$
Mit dem Satz von Steiner erhält man
$J_A = J_S + md^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{1}{2}l\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot ml^2$
Damit vervierfacht sich das Trägheitsmoment.

Bemerkung:
Das Resultat kann auch direkt wie bei der Schwerpunktsachse bestimmt werden:

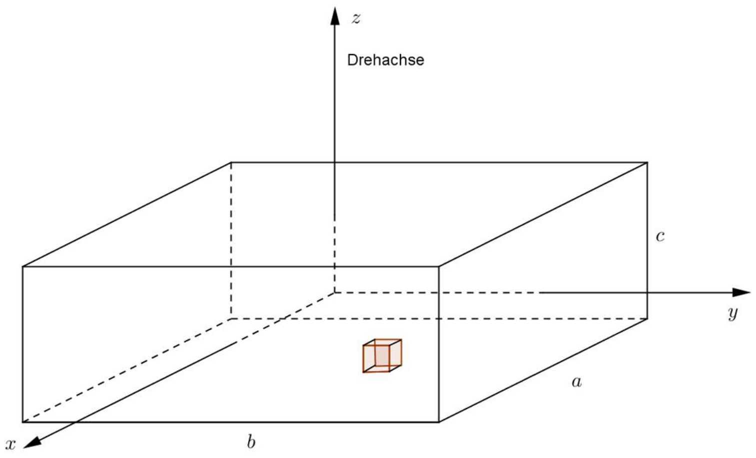
$$J_A = \int_0^l \rho A x^2 dx = \rho A \int_0^l x^2 dx = \rho A \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^l = \frac{1}{3}(\rho A l) \cdot l^2 = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{m}l^2$$

Beispiel:
Nach 1.2 und dem Satz von Steiner beträgt das Trägheitsmoment eines Zylinders bezüglich einer Mantellinie
$J_M = \frac{3}{2}mR^2$

Trägheitsmoment einer „Hantel“ (zwei Kugeln im Abstand d von der Drehachse)
$J = 2 \cdot \left(\frac{2}{5}mR^2 + md^2\right) = 2m \cdot \left(\frac{2}{5}R^2 + d^2\right)$
Spezialfall: d = R
$J = 2 \cdot m \cdot \frac{7}{5} \cdot R^2 = \frac{14}{5} \cdot mR^2$

1.7. Mehrfachintegrale

1.7.1 Trägheitsmoment eines Quaders



Gegeben ist ein Quader mit den Kantenlängen a, b und c. Das Koordinatensystem hat den Ursprung im Mittelpunkt des Quaders

Das Volumenelement dV mit den Kantenlängen dx, dy und dz hat von der Drehachse z den Abstand
$\sqrt{x^2+y^2}$
Und die Masse
$dm = \rho dV = \rho dzdydx$

Damit gilt für das Trägheitsmoment

$$J = \rho \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} \left(\int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} \left(\int_{-\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c} (x^2+y^2)\, dz \right) dy \right) dx$$

Bei der Integration nach z ist der Integrand konstant.

$$J = \rho c \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} (x^2+y^2)\, dydx$$

$$J = \rho c \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} \left(\left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} \right) dx$$

$$J = \rho bc \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} \left(x^2 + \frac{1}{12} b^2 \right) dx$$

$$J = \rho bc \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{12} b^2 x \right]_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} = \rho abc \left(\frac{1}{12} a^2 + \frac{1}{12} b^2 \right)$$

$$J = \frac{1}{12} \rho abc (a^2+b^2) = \frac{1}{12} m (a^2+b^2)$$

Das Trägheitsmoment eines Quaders bezüglich der z-Achse ist von der Höhe c unabhängig.

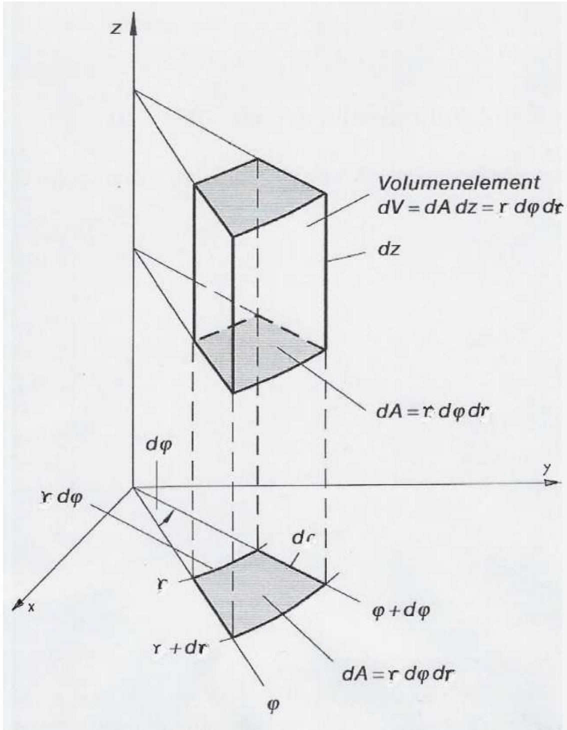
$$\boxed{J = \frac{1}{12} m (a^2+b^2)} \qquad 1.7.1$$

Übungsaufgabe
Gesucht ist das Trägheitsmoment eines Würfels bezüglich einer seiner Kanten.

Lösung in Analogie zum Quader oder nach dem Satz von Steiner:

$$J = J_S + m \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \right)^2 = \frac{1}{6} m a^2 + \frac{1}{2} m a^2 = \frac{2}{3} m a^2$$

1.7.2 Trägheitsmoment des Kreiszylinders



Das Resultat ist bereits aus 1.2. bekannt und wird hier auf einem weiteren Weg hergeleitet.
Das Volumenelement dV des Zylinders im Abstand r von der Drehachse hat die Kantenlängen $rd\varphi$, dr und dz, also die Grundfläche $dA = rd\varphi dr$ und die Höhe dz.
Damit gilt:
$dV = r \cdot d\varphi dr dz$
und für die Masse
$dm = \rho dV = rd\varphi dr dz$
Fü das Trägheitsmoment eines Zylinders mit dem Radius R und der Höhe h gilt mit der Definition des Trägheitsmoments J aus 1.1.:

$$J = \rho \int_0^h \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^3\,dr \right) d\varphi \right) dz$$

Das innerste Integral hat den Wert $\frac{1}{4} \cdot R^4$

$$J = \frac{1}{4} \cdot \rho R^4 \int_0^h \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) dz$$

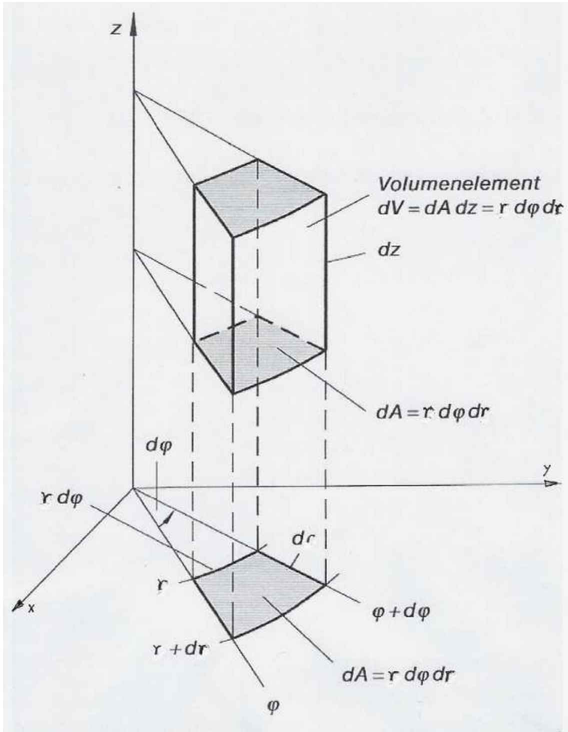
$$J = \frac{1}{4} \cdot \rho R^4 \int_0^h 2\pi\,dz = \frac{1}{2} \cdot \rho\pi R^4 \int_0^h dz$$

$$J = \frac{1}{2} \cdot \rho\pi R^4 \int_0^h dz = \frac{1}{2} \cdot (\rho\pi R^2 h) R^2$$

Da für die Zylindermasse gilt $m = \rho\pi R^2 h$,
ergibt sich wie in 1.2.1 erneut
$J = \frac{1}{2} \cdot \rho\pi R^4 h = \frac{1}{2} \cdot mR^2$

1.7.3 Trägheitsmoment einer Kugel

Das bereits aus 1.3.1 bekannte Resultat wird hier auf einem weiteren Weg hergeleitet.



Analog zum Vorgehen in 1.7.1 hat das Volumenelement dV im Abstand r von der Drehachse hat die Kantenlängen $r \cdot d\varphi$, dr und dz, also die Grundfläche $dA = r \cdot d\varphi dr$ und die Höhe dz.
Damit gilt:
$dV = rd\varphi drdz$
und für die Masse
$dm = \rho dV = \rho rd\varphi drdz$

Stellt man die Kugel projizierend dar, dann schneidet eine zur z-Achse senkrechten Ebene die Kugel in der Höhe z in einem Kreis mit dem Radius
$u = \sqrt{R^2 - z^2}$ (siehe dazu die Abbildung unten).

Damit gilt für das Trägheitsmoment einer Kugel mit dem Radius R

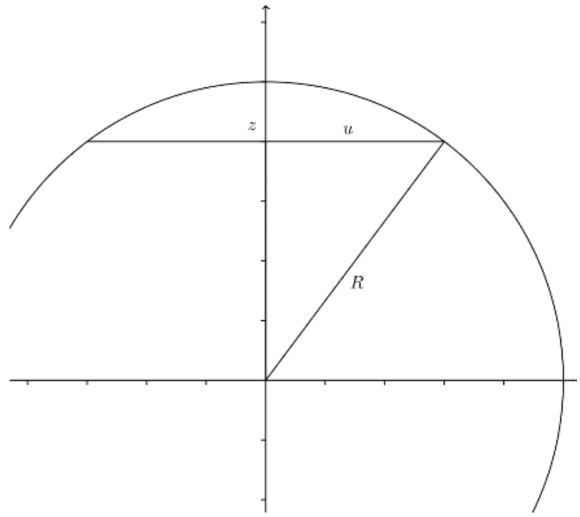
$$J = \rho \int_{-R}^{R} \left(\int_{0}^{u} \left(\int_{0}^{2\pi} r^3 \, d\varphi \right) dr \right) dz$$

Wegen

$$\int_{0}^{2\pi} r^3 \, d\varphi = r^3 \int_{0}^{2\pi} d\varphi = r^3 \cdot 2\pi$$

folgt

$$J = 2\pi\rho \int_{-R}^{R} \left(\int_{0}^{u} r^3 \, dr \right) dz$$



und wegen

$$\int_{0}^{u} r^3 \, dr = \left[\tfrac{1}{4} r^4\right]_0^u = \tfrac{1}{4} u^4$$

ist

$$J = \tfrac{1}{2}\pi\rho \int_{-R}^{R} u^4 \, dz = \pi\rho \int_{0}^{R} (R^2 - x^2)^2 \, dz$$

$$= \pi\rho \int_{0}^{R} (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) \, dz$$

Oder schliesslich

$$J = \pi\rho \int_{0}^{R} (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) \, dz = \pi\rho \left[R^4 z - \tfrac{2}{3} R^2 z^3 + \tfrac{1}{5} z^5\right]_0^R = \pi\rho \left(R^5 - \tfrac{2}{3} R^5 + \tfrac{1}{5} R^5\right) = \tfrac{8}{15}\pi\rho R^5$$

Mi der Kugelmasse
$m = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi R^3$
ergibt sich erneut das Resultat
$J = \frac{2}{5} m R^2$

1.8. Allgemeine Definition des Trägheitsmoments

Gegeben ist ein starrer Körper B mit homogener Massenverteilung (konstante Dichte ρ). Rotiert dieser Körper um die Achse a mit der Winkelgeschwindigkeit ω so trägt das „Volumenelement dV“ zur kinetischen Energie E die Grösse dE bei, wobei für dE gilt:
$dE = \frac{1}{2}dm \cdot v^2 = \frac{1}{2}\rho dV \cdot (r \cdot \omega)^2$
wo r den Abstand des Volumenelements dV von der Rotationsachse bezeichnet.
„Summiert“ (integriert) man alle Volumenelemente von B und bildet man den Grenzwert bei immer feiner werdenden Unterteilungen so erhält man die totale Energie

$$E = \iiint_B \frac{1}{2}\omega^2 \cdot \rho r^2 dV = \frac{1}{2}\omega^2 \rho \iiint_B r^2\, dV$$

Das Trägheitsmoment ist definiert zu

$$J = \rho \iiint_B r^2\, dV$$

Das Symbol für das Dreifachintegral ist folgendermassen zu verstehen:
Analog zum Vorgehen beim Riemannschen Integral mit einer Variablen zerlegt man den Bereich B in n Teilbereiche mit den Volumen $\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3, \ldots \Delta V_n$.
In jedem dieser Teilbereiche wählt man je einen Punkt, P_1 im ersten, P_2 im zweiten, .. . Mit den Abständen r_1, r_2, …dieser Punkte von der Achse a bildet man den Ausdruck

$$r_1^2 \cdot \Delta V_1 + r_2^2 \cdot \Delta V_2 + r_3^2 \cdot \Delta V_3 + \cdots + r_n^2 \cdot \Delta V_n$$

Es kann bewiesen werden, dass dieser Grenzwert für stetige Integranden nicht von der Wahl der Punkte P und auch nicht von der Wahl der Einteilungen abhängig ist.
Unter

$$J = \rho \iiint_B r^2\, dV$$

ist dann der Grenzwert dieser Summe für eine Folge von immer feiner werdenden Unterteilungen von B zu verstehen.

1.9. Gegenüberstellung der Linear- und Rotationsmechanik

	Lineare Mechanik	Rotationsmechanik
Bewegungsgleichung	$F = ma$	$M = J\alpha$
Impuls/Drehimpuls	$p = Mv$	$D = J\omega$
Weg-Zeitfunktion	s	$s = R\varphi$
Geschwindigkeit	$v = \dot{s}$	$v = \dot{s} = R\dot{\varphi} = R\omega$
Beschleunigung	$a = \dot{v} = \ddot{s}$	$\alpha = \dot{v} = R\ddot{\varphi} = R\dot{\omega}$
Arbeit	$W = \frac{1}{2} \cdot mv^2$	$W = \frac{1}{2} \cdot J\omega^2$

Beispiel:
Der (reibungslos) rollende Appenzellerkäse aus der TV-Werbung
Welche Geschwindigkeit erreicht er, wenn er aus der Ruhe von der Höhe h hinunterrollt?

Energiebilanz:
Potenzielle Energie Kinetische Energie
$mgh \quad = \quad \frac{1}{2} \cdot mv^2 + \frac{1}{2} \cdot J\omega^2$
wegen $v = R \cdot \omega$ und $J = \frac{1}{2} \cdot mR^2$ nach 1.2.1 folgt
$$mgh \quad = \frac{1}{2} \cdot mv^2 + \frac{1}{2} \cdot mR^2 \cdot \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2} \cdot mv^2 + \frac{1}{4} \cdot mv^2 = \frac{3}{4} \cdot mv^2$$
und daraus nach Division durch m
$gh = \frac{3}{4} \cdot v^2$ oder
$$v = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot gh} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3} \cdot gh}$$

Zahlenbeispiel: mit $g \approx 10$ m/s^2 und h = 30 m $\qquad v \approx 20\, m/s$

Zum Vergleich:
Rollt ein Quader reibungsfrei eine schiefe Ebene hinunter, so ergibt sich seine Endgeschwindigkeit zu
$v = \sqrt{2gh}$
oder im Zahlenbeispiel $v \approx 24\, m/s$