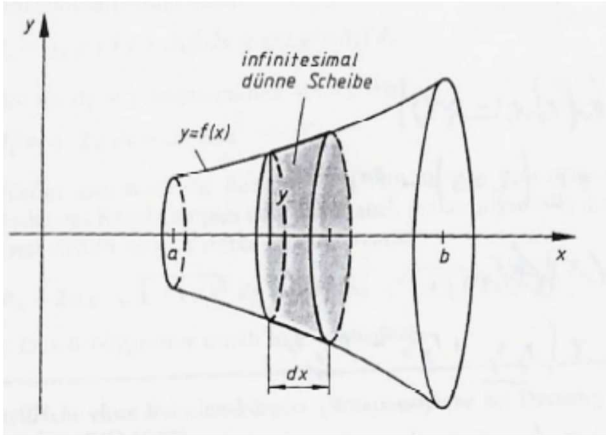
Anwendungen der Integralrechnung

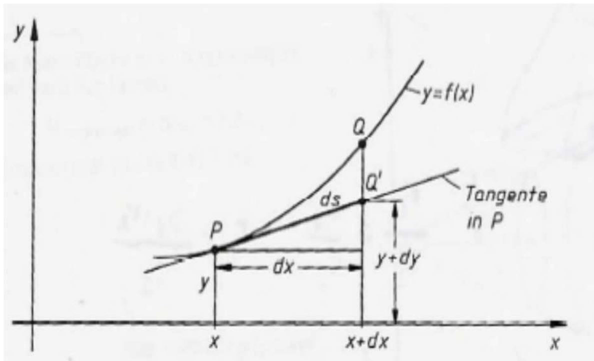
3 Oberfläche

3. 1 Definition

Durch Drehung der Kurve y = f(x) im Intervall [a, b] um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper.



Die folgenden Plausibilitätsbetrachtungen führen auf die Definition des Oberflächeninhalts (bzw. des Mantelflächeninhalts). Dazu wird der Körper in (infinitesimal) dünne Scheiben zerlegt. Jede dieser Scheiben kann annähernd als Kreiskegelstumpf aufgefasst werden.
Aus der Elementargeometrie ist die folgende Formel für die Mantelfläche bekannt:
$M_{Kegelstumpf} = \pi(r_1 + r_2)s$



Für die Mantelfläche der dünnen Scheibe erhält man wegen dy << y:
$dM = \pi\big(y + (y + dy)\big)ds \approx 2\pi\, y\, ds$
Berücksichtigt man noch die Beziehung für das Bogendifferential ds
$ds = \sqrt{1 + (f'(x)^2}\, dx$ so erhält man für das Differential der Mantelfläche
$dM = 2\pi\, y\sqrt{1 + (f'(x)^2}\, dx$

Dies macht die folgende Definition plausibel:

Definition der Mantelfläche eines Rotationskörpers, der entsteht, wenn die Kurve y = f(x) im Intervall [a, b] um die x-Achse gedreht wird:

$$\boxed{M = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x)^2}\, dx} \qquad 3.1.1$$

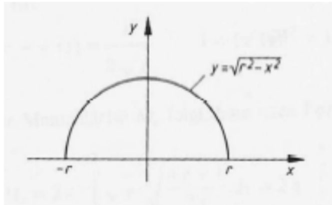
Ist die Kurve in der Parameterdarstellung $t \to \big(x(t), y(t)\big)$ gegeben, wobei $t_A \le t \le t_B$ so erhält man mit dem entsprechenden Bogendifferetial ds für die Mantelfläche:

$$\boxed{M = 2\pi \int_{t_A}^{t_B} y(t) \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt} \qquad 3\ 1.2$$

3.2 Beispiele

a)
Oberfläche einer Kugel

Die Oberfläche einer Kugel wird durch die Drehung eines Halbkreises um die x-Achse erzeugt.



Wegen
$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ und $y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$
erhält man

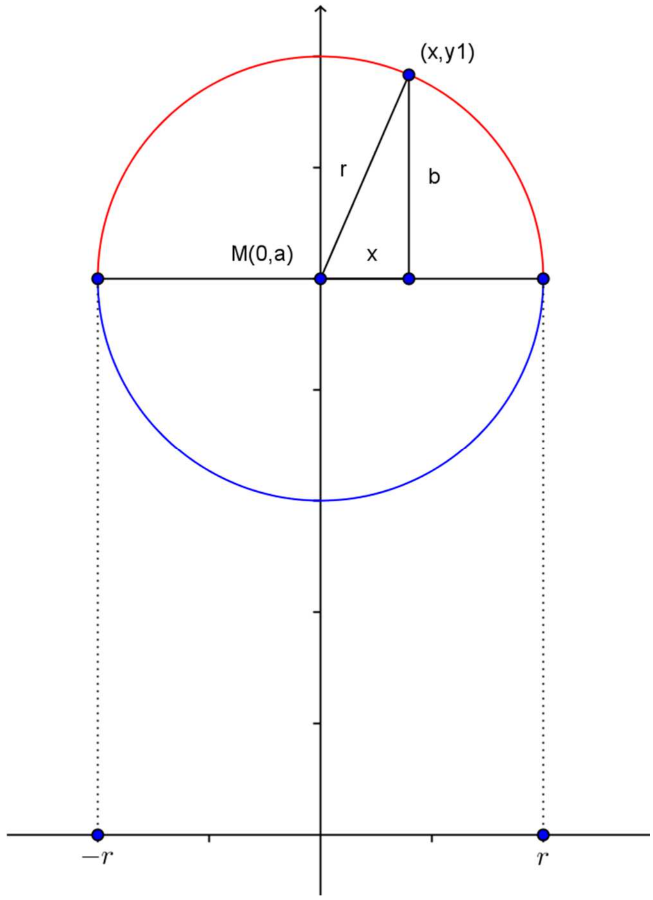
$$\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2} + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

und damit schliesslich wegen der Symmetrie zur y-Achse

$$M = 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4\pi r \int_0^r dx = 4\pi r^2$$

Damit hat die Kugel das Volumen $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ und die Oberfläche $O(r) = 4\pi r^2$. Es gilt also:
$V'(r) = O(r)$
Das Ergebnis ist plausibel, denn vergrössert man den Radius r einer Kugel mit der Oberfläche O(r) um Δr, so nimmt das Volumen um ΔV zu und es gilt $\Delta V \approx O(r) \cdot \Delta r$ oder $\frac{\Delta V}{\Delta r} \approx O(r)$ oder mit dem Grenzübergang für $\Delta r \to 0$
$V'(r) = O(r)$

b)
Oberfläche eines Torus



Der erzeugende Kreis ist in die beiden erzeugenden Halbkreise (rot bzw. blau gefärbt) zu zerlegen.
„oberer" Halbkreis: $y_1 = a + \sqrt{r^2 - x^2}$
„unterer" Halbkreis: $y_2 = a - \sqrt{r^2 - x^2}$

Für die Oberfläche des Torus erhält man damit

$$\begin{aligned} M = O &= 2\pi \int_{-r}^{r} (y_1 + y_2) \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^{r} 2a \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= 4\pi a r \int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= 8\pi a r \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 4\pi a r^2 \end{aligned}$$

Bemerkung:
Definitionslücke des Integranden an den Intervallgrenzen

Volumen des Torus: $V(r) = r^2\pi \cdot 2a\pi$
Oberfläche des Torus: $O(r) = 4\pi a r^2$
Erneut gilt: $V'(r) = O(r)$

Die Lösung kann auch in der Parameterform bestimmt werden.
$(x, y) = (r\cos t, a + r\sin t) \quad 0 \le t \le 2\pi$
Wegen
$\dot{x}(t) = -r\sin t$
$\dot{y}(t) = r\cos t$
erhält man für den Oberflächeninhalt des Torus nach 3.1.2

$$M = 2\pi \int_0^{2\pi} (a + r\sin t) \cdot \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt$$

$$M = 2\pi \int_0^{2\pi} (a + r\sin t) \cdot \sqrt{r^2}\, dt = 2\pi r \int_0^{2\pi} (a + r\sin t)\, dt$$

$$M = 2\pi r \int_0^{2\pi} (a + r\sin t)\, dt = 2\pi r[at - r\cos t]_0^{2\pi} = 2\pi r \cdot 2\pi a = 4\pi^2 a r$$

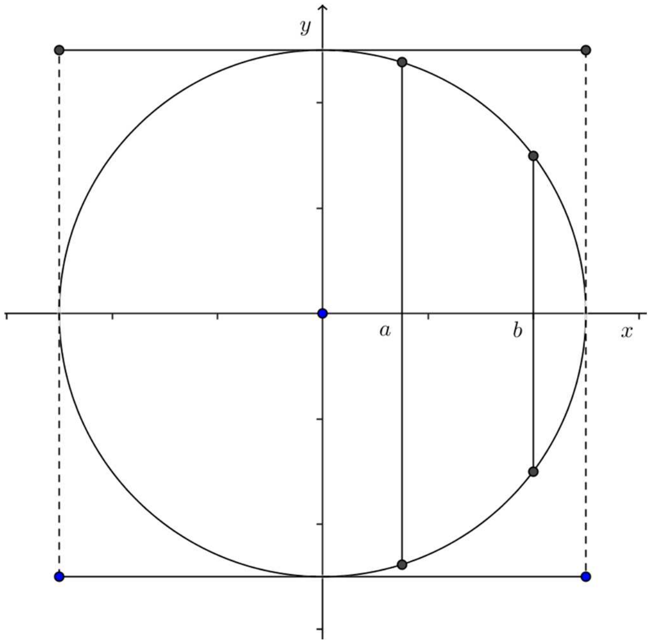
c)
Oberfläche einer Kugelzone

Das Kurvenstück im ersten Quadranten kann in der Parameterform dargestellt werden
$t \to \left(x(t), y(t)\right) = \left(t, \sqrt{r^2 - t^2}\right) \quad t \in [a, b]$
Wegen
$\dot{x}(t) = 1$
$\dot{y}(t) = -\dfrac{t}{\sqrt{r^2 - t^2}}$
ergibt sich für den Oberflächeneinhalt

$$M = 2\pi \int_a^b \sqrt{r^2 - t^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{t^2}{r^2 - t^2}}\, dt$$

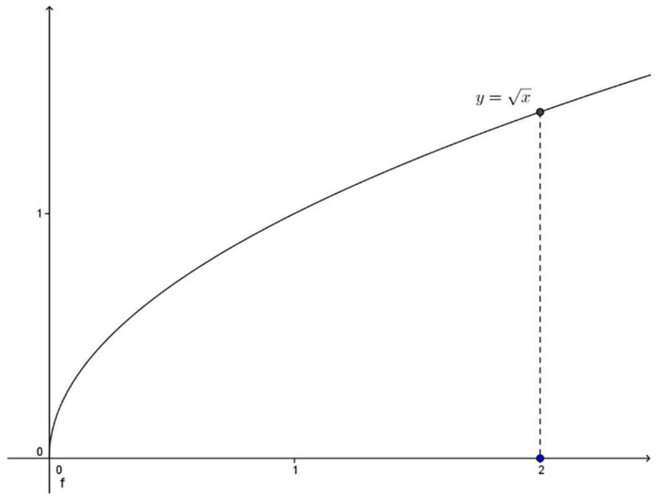
$$M = 2\pi \int_a^b \sqrt{r^2 - t^2} \cdot \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - t^2}}\, dt$$

$$M = 2\pi \int_a^b \sqrt{\frac{r^2(r^2 - t^2)}{r^2 - t^2}}\, dt = 2\pi \int_a^b r\, dt = 2\pi r(b - a)$$



Der Oberflächeninhalt der Kugelzone im Intervall [a, b] ist gleich der Mantelfläche des Zylinders, der der Kugel umbeschrieben werden kann.
Folgerung:
Projiziert man die (Erd-)Kugel auf den umbeschriebenen Zylinder und rollt den Zylinder in die Ebene ab, dann entsteht ein flächentreues (Karten-)Bild der (Erd-)-Kugeloberfläche (J. H. Lambert 1772)

Übungsaufgabe:
Die Parabel $y = \sqrt{x}$ erzeugt im Intervall [0, 2] bei Rotation um die x-Achse ein Rotationsparaboloid. Berechne seine Oberfläche.



Mit
$y = \sqrt{x}$ und $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Erhält man mit

$$1 + y'^2 = \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}$$

für die Oberfläche

$$M = 2\pi \int_0^2 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}} = 2\pi \int_0^2 \sqrt{x + \frac{1}{4}}\,dx = \pi \int_0^2 \sqrt{4x + 1}\,dx = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[\left(4x + 1^{\frac{3}{2}}\right)\right]_0^2 = \frac{13}{3}\pi$$