Bézier-Kurven als Beispiel für Parameterkurven

Die meisten Kurven sind nicht Graphen einer Funktion. In den meisten Fällen gibt es mehrere Punkte mit gleichem x-Wert. Das Problem kann gelöst werden, indem man die Kurve als Bahnkurve eines Massenpunktes vorstellt und zu jedem Zeitpunkt t die Ortskoordinaten des Punktes angibt.
Pierre Bézier, ein französischer Ingenieur, hat im Rahmen seiner Arbeit bei Renault im Jahre 1970 die folgende Idee entwickelt.

Gegeben sind die 4 aufeinanderfolgenden Punkte P_0, P_1, P_2, P_3 mit den Ortsvektoren $\overrightarrow{p_0}$, $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$, $\overrightarrow{p_3}$ Die Bézierkurve verbindet P_0 und P_3, die sogenannten Führungspunkte. P_1 und P_2 beeinflussen die Geschwindigkeit in P_0 und P_3 und haben damit eine Magnetwirkung auf die Bézierkurve. Später wird sich zeigen, dass die Tangente im Randpunkt P_0 die Richtung $\overrightarrow{P_0P_1}$ und die in P_3 die Richtung $\overrightarrow{P_3P_2}$ haben.

Der Ortsvektor eines Kurvenpunktes S(x, y) ergibt sich folgendermassen als gewichtetes Mittel aus den Ortsvektoren der 4 Kontrollpunkte:
$\vec{s} = f_0(t) \cdot \overrightarrow{p_0} + f_1(t) \cdot \overrightarrow{p_1} + f_2(t) \cdot \overrightarrow{p_2} + f_3(t) \cdot \overrightarrow{p_3}$ wobei $0 \leq t \leq 1$ **1)**

Die Gewichte beruhen auf der Entwicklung
$$1^3 = \left((1-t)+t\right)^3 = (1-t)^3 + 3t(1-t)^2 + 3t^2(1-t) + t^3$$

$$f_0(t) = (1-t)^3$$
$$f_1(t) = 3t(1-t)^2$$
$$f_2(t) = 3t^2(1-t)$$
$$f_3(t) = t^3$$

Zum Zeitpunkt t = 0 hat das Gewicht f_0 den Wert 1, alle andern sind 0, d.h. die Kurve beginnt im Punkt P_0.
Zum Zeitpunkt t = 1 hat das Gewicht f_3 den Wert 1, alle andern sind 0, d.h. die Kurve endet im Punkt P_3.
Die Koordinaten der Zwischenpunkte S sind durch die folgenden Parametergleichungen bestimmt:

Es bleibt die Rolle der Punkte P_1 und P_2 zu klären. Wir zeigen, dass $\overrightarrow{P_0P_1}$ gerade die Richtung der Tangente an die Bahnkurve im Punkt P_0 bzw. $\overrightarrow{P_3P_2}$ diejenige der Tangente in P_3 ist.

Die Momentangeschwindigkeit $\vec{v}$ des Massenpunktes zur Zeit t ergibt, indem man Gleichung **1)** nach der Zeit ableitet:

$\vec{v} = f_0'(t) \cdot \overrightarrow{p_0} + f_1'(t) \cdot \overrightarrow{p_1} + f_2'(t) \cdot \overrightarrow{p_2} + f_3'(t)(t) \cdot \overrightarrow{p_3}$
wobei
$$f_0'(t) = -3(1-t)^2$$
$$f_1'(t) = 3(1-t)(1-3t)$$
$$f_2'(t) = 3t(2-3t)$$
$$f_3'(t) = 3t^2$$

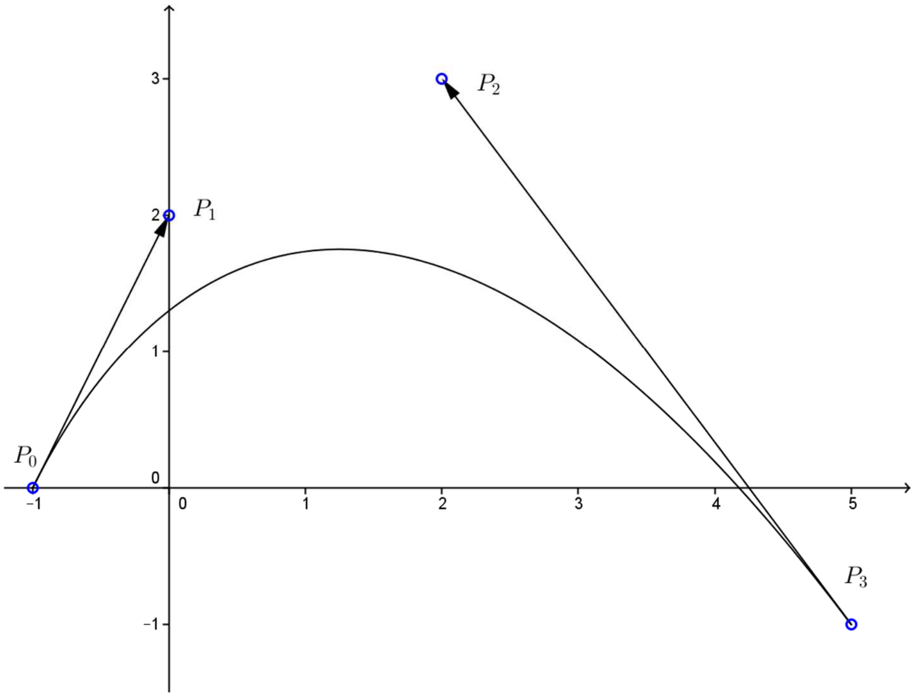
Die Geschwindigkeit im Anfangspunkt P_0 (t = 0) ergibt sich zu $\overrightarrow{v_0} = -3\overrightarrow{p_0} + 3\overrightarrow{p_0} = 3\overrightarrow{P_0P_1}$
Die Geschwindigkeit im Endpunkt P_1 (t = 1) ergibt sich zu $\overrightarrow{v_1} = -3\overrightarrow{p_2} + 3\overrightarrow{p_3} = 3\overrightarrow{P_3P_2}$

Es lässt sich also mit P_1 nicht nur die Tangentenrichtung, sondern auch die Bahngeschwindigkeit in P_0 verändern. Verschiebt man den Punkt P_1 von P_0 weg, ohne die Richtung P_0P_1 zu ändern, so vergrössert sich die Bahngeschwindigkeit. P_1 hat also eine magnetische Wirkung auf den Kurvenpunkt S.

Beispiel:

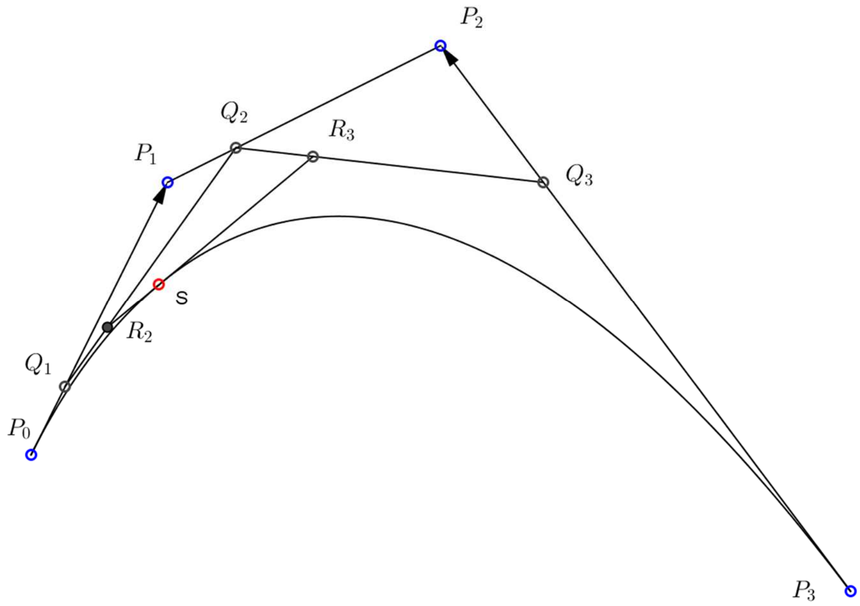
$P_0(-1, 0)$, $P_1(0, 2)$, $P_2(2, 3)$, $P_3(5, -1)$

$$x = (1-t)^3 \cdot (-1) + 3t(1-t)^2 \cdot 0 + 3t^2(1-t) \cdot 2 + t^3 \cdot 5 = -1 + 3t + 3t^2$$
$$y = (1-t)^3 \cdot 0 + 3t(1-t)^2 \cdot 2 + 3t^2(1-t) \cdot 3 + t^3 \cdot (-1) = 6t - 3t^2 - 4t^3$$



Konstruktion eines Punktes nach de Casteljau:

Unabhängig von Bézier hat de Casteljau bei Citroen folgenden Algorithmus zur Konstruktion eines Punktes gefunden.
In der Abbildung ist t = $^1/_4$

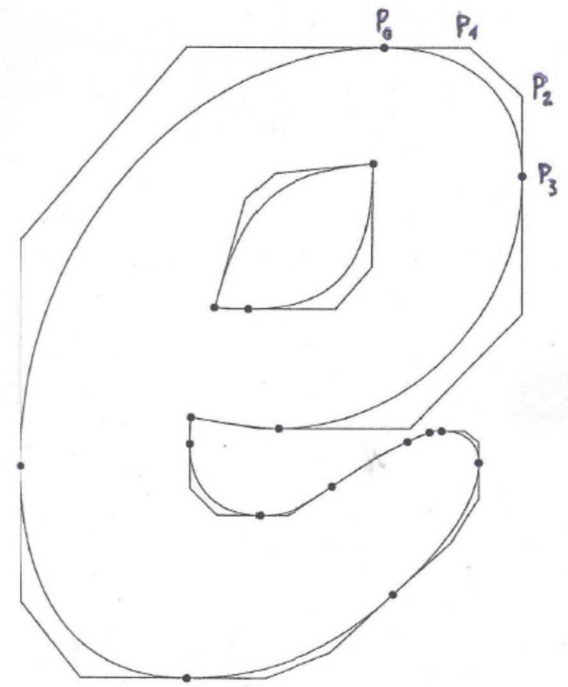


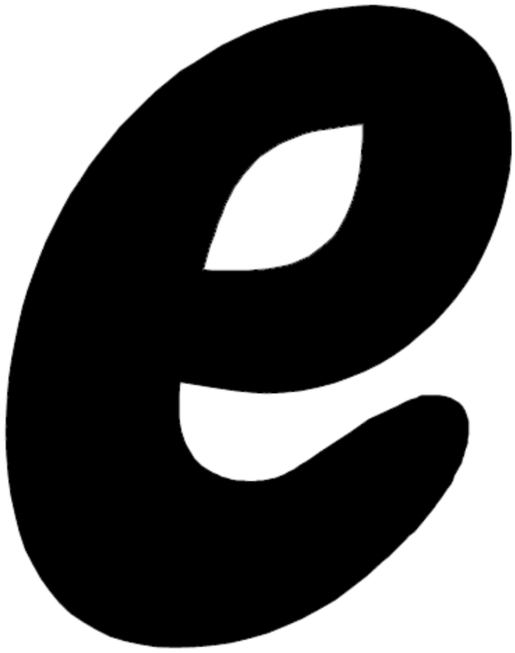
Es ist für den Beweis der Konstruktion zu zeigen, dass der Ortsvektor von S die Bedingung 1) erfüllt.

Wird eine Strecke AB vom Punkt T so geteilt, dass gilt:
$\overrightarrow{AT} = t \cdot \overrightarrow{AB}$.
Damit gilt für den Ortsvektor $\vec{t}$ des Punktes T :
$\vec{t} = (1-t) \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$
Für $\vec{s}$ gilt damit:
$\vec{s} = (1-t) \cdot \overrightarrow{r_2} + t \cdot \overrightarrow{r_3}$
Entsprechend gilt für $\overrightarrow{r_2}$
$\overrightarrow{r_2} = (1-t) \cdot \overrightarrow{q_1} + t \cdot \overrightarrow{q_2}$
bzw.
$\overrightarrow{r_3} = (1-t) \cdot \overrightarrow{q_2} + t \cdot \overrightarrow{q_3}$
oder eingesetzt in $\vec{s}$
$\vec{s} = (1-t) \cdot \big((1-t) \cdot \overrightarrow{q_1} + t \cdot \overrightarrow{q_2}\big) + t \cdot \big((1-t) \cdot \overrightarrow{q_2} + t \cdot \overrightarrow{q_3}\big)$
$\quad = (1-t)^2\overrightarrow{q_1} + 2t \cdot (1-t) \cdot \overrightarrow{q_2} + t^2 \cdot \overrightarrow{q_3}$
$\overrightarrow{q_i} = (1-t) \cdot \overrightarrow{p_{i-1}} + t \cdot \overrightarrow{p_i}$ für i = 1, 2, 3
erhält man schliesslich nach mühsamer Rechnung die behauptete Gleichung 1).

Grundlegende Arten von Computerschriften (Fonts)

Zur Darstellung der Umrisslinien von Computerschriften werden in PostScript Bézierkurven verwendet. Je nach Lage der Kontrollpunkte entstehen Grundtypen wie im Beispiel die U-Form, Kurven mit Wendepunkt oder mit einer Schleife (vgl. dazu die Beispiele in den Übungsaufgaben). Im Unterschied dazu werden bei Bitmap-Fonts die Zeichen durch geschwärzte Bildpunkte in einem Raster dargestellt.





ac