Splineinterpolation

„Spline“ bezeichnet im angelsächsischen Sprachraum ein im Schiffsbau verwendetes biegsames Lineal, mit dem man die Kontur eines Schiffsrumpfs in Längsrichtung an Hand von fixierten Punkten – den Spanten – festlegt (andere Interpretation als optimaler Slalom).

Die Funktion f, die das Interpolationsproblem im Intervall $[x_0,x_n]$ löst ist durch die folgenden Bedingungen festgelegt:

f stimmt auf jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}$¨$0 \le i \le n-1$ mit einem kubischen Polynom überein, d.h. es gilt:

(4) $f(x) = A_i(x-x_i)^3 + B_i(x-x_i)^2 + C_i(x-x_i) + D_i$ mit $x \in [x_i, x_{i+1}]$

f ist zweimal stetig differenzierbar und genügt den folgenden Interpolationsbedingungen

(1) $f(x_i) = y_i$

f erfüllt die folgenden Randbedingungen

(5) $f''(x_0) = f''(x_n) = 0$

Im Folgenden wird gezeigt, dass die Berechnung der Koeffizienten auf ein tridiagonales Gleichungssystem führt. Es kann gezeigt werden, dass für diese Lösung die Gesamtkrümmung minimal ist.

Wir setzen zur Abkürzung $h_i = x_{i+1} - x_i \quad 0 \le i \le n-1$

Es wird sich später zeigen, dass sich die Koeffizienten sehr leicht aus den Stützwerten y_i , den Intervallbreiten h_i und den zweiten Ableitungen $f''(x_i) = M_i$ mit $0 \le i \le n$, berechnen lassen. Zur Abkürzung schreiben wir dafür M_i (Momente genannt). Wegen (5) sind zwei dieser Momente bereits bekannt.

Mit (4) ergeben sich damit die folgenden Bedingungen

$$
\begin{array}{lrl}
f(x_i) = y_i & D_i & = y_i \\
f(x_{i+1}) = y_{i+1} & A_i h_i^3 + B_i h_i^2 + C_i + D_i & = y_{i+1} \\
f''(x_i) = M_i & 2B_i & = M_i \\
f''(x_{i+1}) = M_{i+1} & 6A_i h_i + 2B_i & = M_{i+1}
\end{array}
$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems ergibt:

$$D_i = y_i$$

$$B_i = \frac{1}{2} M_i$$

(7) $$A_i = \frac{1}{6h_i}(M_{i+1} - M_i)$$

$$C_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{1}{2} M_i h_i - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i)$$

Da die Funktion f im ganzen Intervall stetig differenzierbar sein soll, müssen an den inneren Stützstellen der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert der 1. Ableitung übereinstimmen, d.h. es muss gelten:

(8) $3A_{i-1}h_{i-1}^2 + 2B_{i-1}h_{i-1} + C_{i-1} = C_i$

Setzt man (7) in (8) ein, so erhält man für i = 1, 2, ..., n – 1 (Umrechnung im Anhang)

(9) $\frac{h_{i-1}}{6} M_{i-1} + \frac{h_{i-1} + h_i}{3} M_i + \frac{h_i}{6} M_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$

Mit den „Randmomenten“ $M_0 = 0$ und $M_n = 0$ ist die Berechnung von M_1, M_2, .. M_{n-1} ist also darauf zurückgeführt, ein Gleichungssystem der Form **AM = b** zu lösen. Dabei ist **A** eine (n – 1) × (n – 1)-Matrix, **M** der Vektor der gesuchten Momente und **b** der Vektor mit den Komponenten

$b_i := \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$ i = 1, 2, ..., (n - 1)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{h_0 + h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h_1}{6} & \frac{h_1 + h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .. & .. & .. & 0 & 0 \\ & & .. & .. & .. & 0 \\ & & 0 & \frac{h_{n-3}}{6} & \frac{h_{n-3} + h_{n-2}}{3} & \frac{h_{n-2}}{6} \\ & & & 0 & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2} + h_{n-1}}{3} \end{pmatrix}$$

Beachte: Die symmetrische Matrix A ist diagonaldominant. Es kann gezeigt werden, dass die Lösung eindeutig ist.

Schiffsrumpf		Lösung mit Spline-Interpolation				
	x_i	0	1	2	3	4
	y_i	0	0.5	1.7	2.4	2.6
	h_i		1	1	1	1
$b_i := \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$			0.7	-0.5	-0.5	

Zu lösen ist die Matrixgleichung AM = B mit

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ und } B = \begin{bmatrix} 0.7 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Die Gausselimination ergibt: $\begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. & 1.285714286 \\ 0. & 1. & 0. & -0.9428571429 \\ 0. & 0. & 1. & -0.5142857142 \end{bmatrix}$

Damit sind die Momente bestimmt zu
$M_0 = 0$, $M_1 = 1.285714286$, $M_2 = -0.9428571429$, $M_3 = -0.5142857142$ und $M_4 = 0$.

y_i			0	0.5	1.7	2.4	2.6
			M_0	M_1	M_2	M_3	M_4
Momente			0.00000	1.28571	-0.94286	-0.51429	0.00000
$A_i = \frac{1}{6h_i}(M_{i+1} - M_i)$			0.21429	-0.37143	0.07143	0.08571	
$B_i = \frac{1}{2} M_i$			0	0.64286	-0.47143	-0.25714	
$C_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{1}{2} M_i h_i - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i)$			0.28571	0.92857	1.10000	0.37143	
$D_i = y_i$			0	0.5	1.7	2.4	2.6

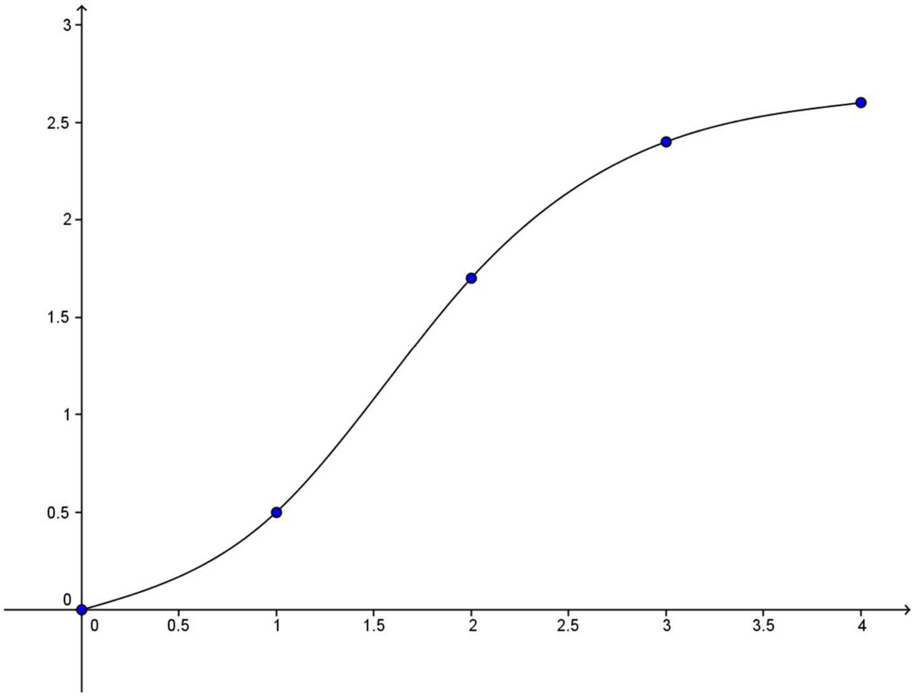
Die Interpolationspolynome haben damit die folgenden Gleichungen:

Intervall [0, 1]: $0.21429\,x^3 + 0.28571\,x$

Intervall [1, 2]: $-0.37143\,(x-1)^3 + 0.64286\,(x-1)^2 + 0.92857\,x - 0.42857$
$= -0.37143\,x^3 + 1.75715\,x^2 - 1.47144\,x + 0.58572$

Intervall [2, 3]: $0.07143\,(x-2)^3 - 0.47143\,(x-2)^2 + 1.1\,x - 0.5$
$0.07143\,x^3 - 0.90001\,x^2 + 3.84288\,x - 2.95716$

Intervall [3, 4] $0.08571\,(x-3)^3 - 0.25714\,(x-3)^2 + 0.37143\,x + 1.28571$
$0.08571\,x^3 - 1.02853\,x^2 + 4.22844\,x - 3.34272$



Anhang:

$$3\cdot\frac{1}{6h_{i-1}}(M_i - M_{i-1})\cdot h_{i-1}^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot M_{i-1}h_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{1}{2}M_{i-1}\cdot h_{i-1} - \frac{h_{i-1}}{6}(M_i - M_{i-1})$$

$$= \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{1}{2}M_i\cdot h_i - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i)$$

oder vereinfacht:

$$M_{i-1}\left(-\frac{1}{2}h_{i-1} + h_{i-1} - \frac{1}{2}h_{i-1} + \frac{1}{6}h_{i-1}\right) +$$
$$M_i\left(\frac{1}{2}h_{i-1} - \frac{1}{6}h_{i-1} - \frac{1}{2}h_i - \frac{1}{6}h_i\right) +$$
$$M_{i+1}\cdot\frac{1}{6}h_i$$

$$= \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

bzw.

$$\frac{1}{6}h_{i-1}\cdot M_{i-1} + M_i\frac{h_{i-1}+h_i}{3} + \frac{1}{6}h_i\cdot M_{i+1} = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$$