2.2 Interpolation nach Lagrange (1736 – 1813)

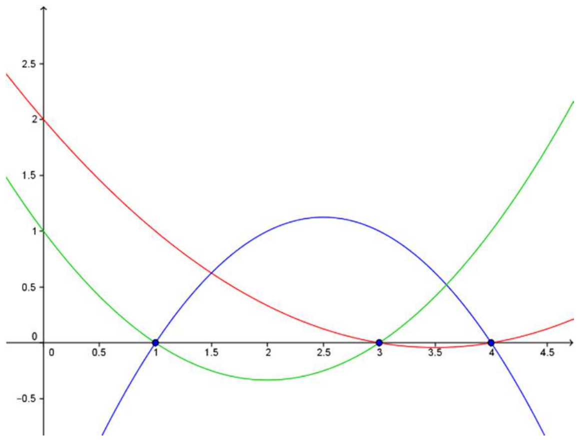
Beispiel:
(1, 3), (3, 1), (4, 6)

Idee:
Suche zunächst Polynome, die an einer Stützstelle den Funktionswert 1 und an den übrigen Stellen den Funktionswert 0 annehmen.

$$L_0(x) = \frac{(x-3)\cdot(x-4)}{(1-3)\cdot(1-4)} = \tfrac{1}{6}(x-3)\cdot(x-4)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)\cdot(x-4)}{(3-1)\cdot(3-4)} = -\tfrac{1}{2}(x-1)\cdot(x-4)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)\cdot(x-4)}{(3-1)\cdot(3-4)} = \tfrac{1}{3}(x-1)\cdot(x-3)$$



Das gesuchte Interpolationspolynom hat nun die Gleichung

$$f(x) = 3L_0(x) + 1L_0(x) + 6L_0(x)$$

$$f(x) = 2x^2 - 9x + 10$$

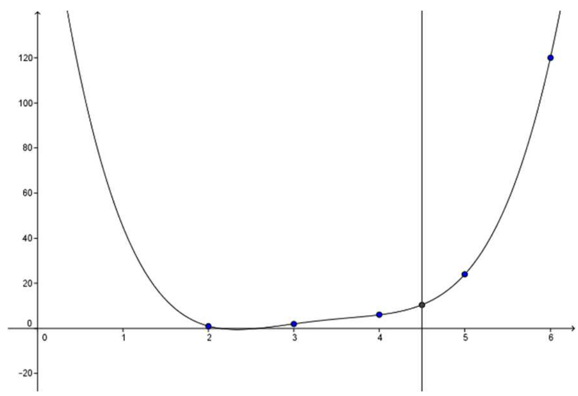
Vorteil der Methode:
Die Methode ist gut geeignet, wenn an vorgegebenen Stützstellen die Funktionswerte ändern.

Nachteil:
Kommt zu den bisherigen Stützstellen eine weitere dazu, dann müssen mit u.U. grossem Aufwand die Grundpolynome neu berechnet werden. Das Verfahren nach Lagrange ist deshalb vor allem von theoretischem Interesse.

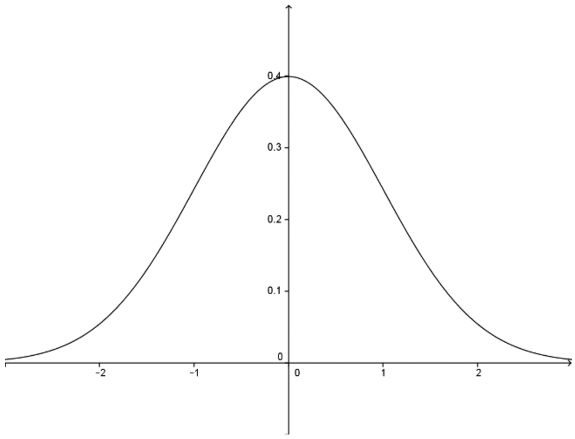
Aufgabe:
Die so genannte Gammafunktion Γ(x) setzt die für natürliche Zahlen definierten Fakultäten für reelle Zahlen fort und es gilt Γ(n) = (n – 1)!
Wird Γ(x) im Intervall [2, 6] mit diesen Stützstellen mit einem Polynom 4. Grades interpoliert, so kann damit ein Näherungswert für Γ(4.5) bestimmt werden.

$$f(x) = \frac{53}{24}x^4 - \frac{349}{12}x^3 + \frac{3403}{24}x^2 - \frac{3587}{12}x + 229$$

$f(4.5) \approx 20.16$
$\Gamma(4.9) \approx 20.67$



Aufgabe:
Die Dichte der in der Statistik wichtigen Normalverteilung hat keine elementare Stammfunktion. Für die Verteilungsfunktion findet man folgende Tabellenwerte:



x	0.5	0.6	0.8	0.9
$\Phi(x)$	0.6915	0.7257	0.7881	0.8159

Bestimme mit einem geeigneten Interpolationspolynom einen Schätzwert für
a) $\Phi(0.6746)$ b) $\Phi(^2/_3)$ c) $\Phi(1)$ Extrapolation!
d) $\Phi(0.52)$

$$f(x) = \big((-0.0333x - 0.0733)(x - 0.6) + 0.342\big)(x - 0.5) + 0.6915$$
Oder umgeformt
$$f(x) = -0.0333x^3 - 0.0367x^2 + 0.4127x + 0.4985$$

Resultate:

x	Näherungswert	genauerer Wert
0.6746	0.7500	0.7500
$^2/_3$	0.7474	0.7475
1	0.8412	0.8413
0.52	0.6985	0.6985

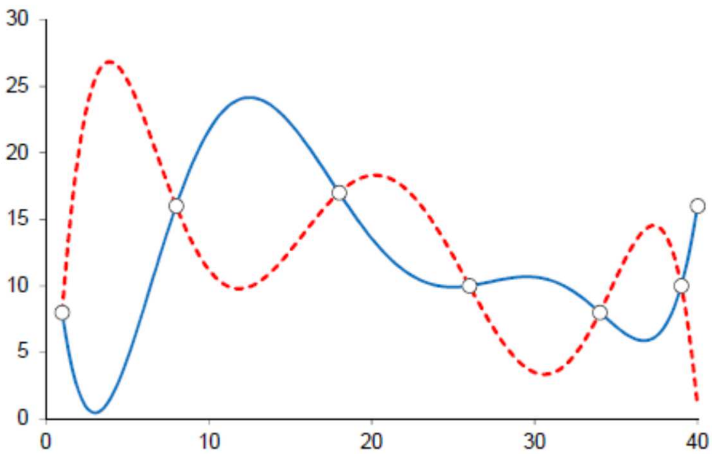
Die folgenden Beispiele, dass die globale Interpolation z.T. unerwünschte Eigenschaften hat:

a)
Dargestellt ist das Interpolationspolynom zu den in der Tabelle angegebenen Stützpunkten:

x	1	8	18	26	34	39	40
y	8	16	17	10	8	10	16

Die Abbildung zeigt, dass der Graph stark von einem Stützpunkt abhängen kann. Wird etwa an der Stützstelle x = 40 der Funktionswert 16 durch 1 ersetzt, so verändert sich der Graph (gestrichelt dargestellt) stark.

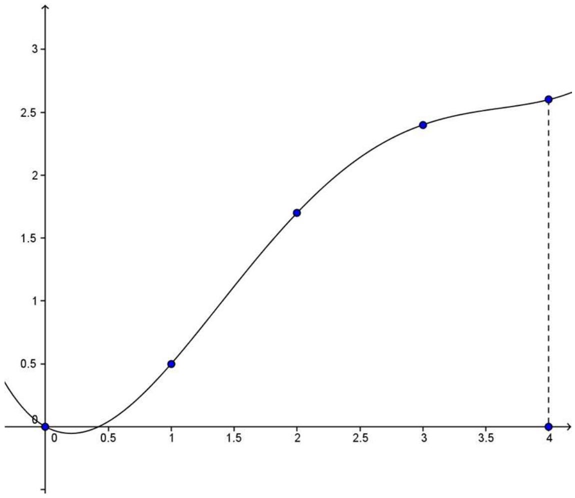
$f_1(12) \approx 24.06$
$f_2(12) \approx 10.74$



b)
Das globale Interpolationspolynom für den Schiffsrumpf

$$f(x) = 0 + 0.5x + 0.35x(x-1) - 0.2x(x-1)(x-2) + 0.05x(x-1)(x-2)(x-3)$$

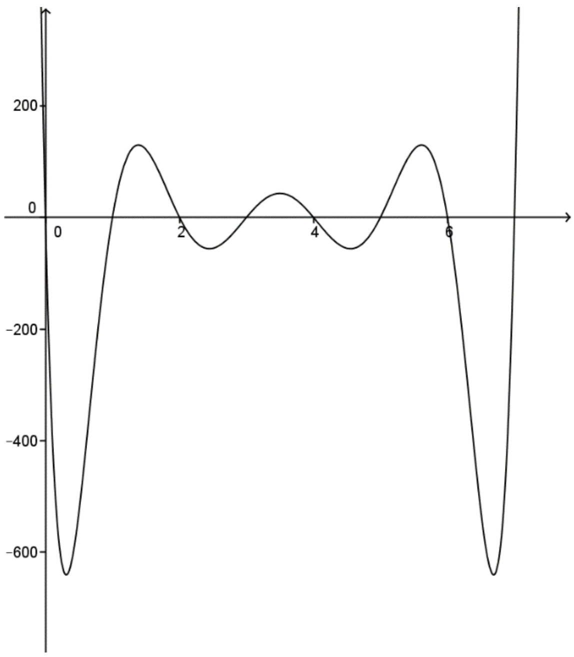
gibt den Verlauf der Begrenzung nicht sinnvoll wieder, denn es treten im Intervall [0,1] negative Funktionswerte auf und im Intervall [3,4] ein Wendepunkt.



$$f(x) = \frac{53}{24}x^4 - \frac{349}{12}x^3 + \frac{3403}{24}x^2 - \frac{3587}{12}x + 229$$

c)
Abgebildet ist der Graph der Funktion
$f(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4) \cdot (x-5) \cdot (x-6) \cdot (x-7)$

Das Beispiel zeigt, dass in der Umgebung der Intervallgrenzen starke Oszillationen auftreten können. Dies lässt sich vermeiden, indem die Stützstellen nicht äquidistant, sondern in der Umgebung der Intervallgrenzen dichter gewählt werden (→ Nullstellen der Tschebichevpolynome).



Die Nachteile von globalen Polynomen können vermieden werden, indem man in jedem einzelnen Teilintervall geeignete Polynome betrachtet.