3. Konvergenzkriterien

Für die Konvergenz einer Reihe ist es notwendig, dass die Folgenglieder schliesslich beliebig klein werden, d.h. es muss gelten:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

Wie die harmonische Reihe zeigt, ist diese Bedingung zwar notwendig jedoch nicht hinreichend.
Wichtig ist das folgende hinreichende (aber nicht notwendige)

Quotientenkriterium (ohne Beweis):

Erfüllen die Glieder einer unendlichen Reihe die Bedingung $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q < 1$ so ist die Reihe konvergent. Ist q > 1, dann ist die Reihe divergent, für q = 1 versagt das Quotientenkriterium.

Bemerkung:
Eine konvergente Reihe verhält sich also für grosse n ungefähr wie eine konvergente geometrische Reihe.

Beispiele:
a)

Ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}$ konvergent oder divergent?

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(2k)!}{(2k)!(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$$

Wegen $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 0$ ist die Reihe konvergent, d.h.
der Quotient wird beliebig klein, sofern nur k genügend gross gewählt wird.

b)

Bei der harmonischen Reihe versagt das Quotientenkriterium, denn wegen $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1}$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k}{k+1}\right| = 1.$$

Damit ist sowohl eine Konvergenz als auch eine Divergenz möglich. Bereits im Grundkurs wurde aber durch Abschätzen geeigneter Teilsummen gezeigt, dass die harmonische Reihe divergiert (vgl. http://mathekurs.ch/mk/files/algebra/harmonReihe.pdf).

Dass das Quotientenkriterium nicht notwendig ist, zeigt das folgende Beispiel.
c)
Es kann bewiesen werden, dass
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
konvergent ist. Nach dem Quotientenkriterium ist aber
$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1 .$$

Leibniz'sches Kriterium

Eine alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + -\ldots$ ist konvergent, wenn die Beträge ihrer Glieder eine monoton fallende Nullfolge bilden.

Beispiel:
Für die alternierende harmonische Reihe gilt
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots = \ln 2$$
$\rightarrow$ Logarithmusreihe