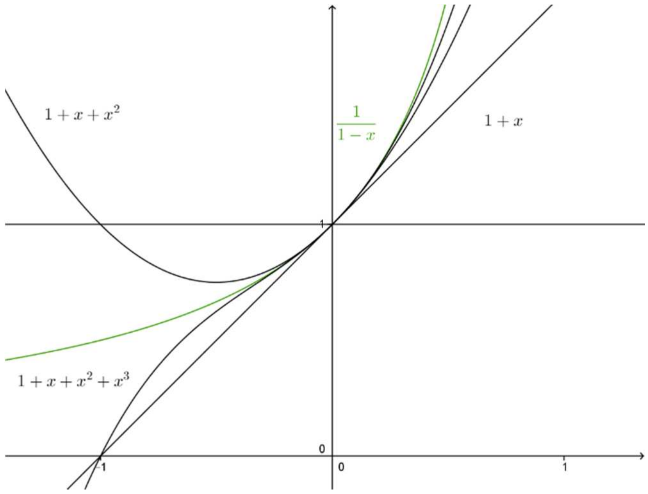
4. Potenzreihen

Potenzreihen unterscheiden sich von Zahlenreihen dadurch, dass die Glieder Potenzen einer Variablen x sind.

Einführendes Beispiel:
Setzt man in der Summenformel der nichtabbrechenden geometrischen Reihe $a_1 = 1$ und $q = x$ so erhält man die Potenzreihe.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$$

Durch den Summenwert der Reihe ist für $|x| < 1$ eine Funktion definiert.
Diese kann durch die aus den n ersten Summanden bestehenden Polynome beliebig genau angenähert werden.



Allgemein:
Unter einer Potenzreihe versteht man formal eine Reihe der Form

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k \qquad a_k \text{ Koeffizienten}$$

Die Menge der x-Werte für welche die Potenzreihe konvergiert heisst Konvergenzbereich der Potenzreihe. Dies bedeutet, dass die aus den n ersten Summanden bestehende Partialsummenfolge s_n einen Grenzwert hat.
Für jede Potenzreihe gibt es eine nicht-negative Zahl r, Konvergenzradius genannt, so dass gilt:
Die Potenzreihe konvergiert für $|x| < r$, divergiert für $|x| > r$,
für $x = \pm r$ ist keine allgemeine Aussage möglich.
$r = \infty$ bedeutet, dass die Potenzreihe für alle $x \in R$ konvergiert.

Beispiel:.
Bei der geometrischen Reihe ist der Konvergenzradius r = 1. Die Reihe ist für x = 1 bestimmt divergent, für x = -1 divergent.

Übungsaufgabe:
Wie heisst die Potenzreihenentwicklung von

$$\frac{1}{1+x^2}$$

Wie gross ist der Konvergenzradius?

Lösung:
$1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + - \ldots$ Konvergenzradius r = 1

Damit stellen sich die folgenden Probleme:

Wie kann eine gegebene Funktion in eine Potenzreihe entwickelt werden und welches ist der Konvergenzbereich?